



О ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПОД ВНЕШНИМ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ОКОНЧАНИЯ ЛИНИИ БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ТОРА

Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский, Е.П. Селезнев, У. Фойдель

Исследуется модель в виде логистического отображения под внешним квазипериодическим воздействием на частоте, заданной золотым сечением. Установлено, что концом линии бифуркации удвоения тора на плоскости управляющий параметр – амплитуда воздействия служит критической точкой, в которой соседствуют области тора, удвоенного тора, странного нехаотического аттрактора и хаоса. Аттрактором в критической точке является фрактальный объект – «критический тор». Развита ренормгрупповая теория, на основе которой выявлены свойства скейлинга для критического тора и для карты динамических режимов на плоскости параметров около критической точки. Представлены результаты экспериментов с нелинейным колебательным контуром под внешним квазипериодическим воздействием и продемонстрировано качественное соответствие с теорией.

Введение

Изучение перехода от регулярного поведения к хаосу через квазипериодические режимы – одна из центральных тем в нелинейной динамике. Начиная с основополагающих работ Ландау [1] и Рюэлли и Такенса [2], многие авторы обращались к теоретическому и экспериментальному исследованию различных аспектов таких переходов. Как оказалось, некоторые тонкие детали квазипериодической динамики трудно выявить и изучать в автономных системах, но их можно успешно анализировать, рассматривая системы с внешним квазипериодическим воздействием. Действительно, в автономных системах характерные частоты определяются внутренней динамикой, и управлять ими независимо от других параметров трудно, если вообще возможно. Напротив, в неавтономных системах частоты, представленные в спектре внешнего воздействия, можно рассматривать просто как управляющие параметры и задавать произвольно. В эксперименте их легко регулировать, обеспечивая любое желаемое соотношение частот.

Как выяснилось в последнее время, на пути от регулярной динамики к хаосу в системах с квазипериодическим внешним воздействием очень часто встречается своего рода промежуточный тип поведения, который отвечает странному нехаотическому аттрактору (SNA). Это обстоятельство делает всю картину перехода весьма нетривиальной.

Странные нехаотические аттракторы впервые были описаны в работе

Гребоджи с соавторами в 1984 году [3]. С тех пор они исследовались как численно [4–19], так и в эксперименте [20,21].

Для странных нехаотических аттракторов характерно совмещение определенных свойств регулярных режимов и хаоса. Также как регулярные аттракторы, они имеют только отрицательные ляпуновские показатели (помимо нулевых, ассоциирующихся с фазами квазипериодической внешней силы), однако их геометрическая структура фрактало-подобная, как у хаотических аттракторов. Спектрально-корреляционные свойства, характерные для режима странного нехаотического аттрактора, также оказываются промежуточными между порядком и хаосом – генерируемый спектр может быть сингулярно-непрерывным [14,22]. Математическое исследование странных нехаотических аттракторов находится все еще в начальной стадии [25,26].

В этой статье мы обратимся к модели в виде логистического отображения под внешним квазипериодическим воздействием [10,17,27–30]. Известно, что эта модель демонстрирует богатое динамическое поведение, в частности квазипериодические режимы, странный нехаотический аттрактор, хаос.

В нашем исследовании безразмерная частота внешней силы будет предполагаться фиксированной и заданной «золотым сечением» – иррациональным числом $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$.

На плоскости параметров, где по одной оси координат отложен управляющий параметр логистического отображения, а по другой – амплитуда внешнего воздействия, присутствует линия бифуркации удвоения тора. Если двигаться вдоль этой линии в сторону увеличения амплитуды воздействия, то она оканчивается в некоторой критической точке. На эту точку в дальнейшем будем ссылаться как на точку TDT (torus doubling terminal).

Можно утверждать, что критическое поведение, реализующееся в точке TDT, имеет фундаментальное значение для понимания динамики системы в целом. Действительно, в этой точке сходятся области всех характерных для системы качественно различных режимов – квазипериодического поведения, странного нехаотического аттрактора, хаоса. Поэтому в настоящей статье мы сосредоточимся на изучении динамики в точке TDT и в ее окрестности.

Для описания динамики в точке TDT мы развиваем подход, основанный на методе ренормгруппы (РГ). С его помощью удастся вскрыть свойства скейлинга аттрактора, который реализуется в критической точке, а также найти закономерности подобия, присущие карте динамических режимов на плоскости параметров вблизи этой точки.

Подобно другим ситуациям, в которых работает метод РГ, критическое поведение в точке TDT будет, по-видимому, характерно не только для модели в виде логистического отображения, но и для широкого класса нелинейных диссипативных систем при наличии внешнего квазипериодического воздействия. Чтобы проверить это предположение, был предпринят эксперимент с нелинейным колебательным контуром. Внешнее воздействие на контур задавалось в виде комбинации двух синусоидальных сигналов с соотношением частот, равным золотому сечению. При этом регулировка уровня одного или другого сигнала соответствовала изменению управляющего параметра или амплитуды воздействия в модельном отображении. Особенности наблюдаемой в эксперименте динамики хорошо согласуются с результатами теоретического анализа, установленными для логистического отображения.

1. Логистическое отображение и основные режимы его динамики под внешним квазипериодическим воздействием

Рассмотрим логистическое отображение, в которое добавлен член, изменяющийся квазипериодически в зависимости от дискретного времени n ,

$$x_{t+1} = \lambda - x_t^2 + \epsilon \cos(2\pi\omega t + \phi), \quad \omega = (5^{1/2} - 1)/2, \quad (1)$$

где λ – управляющий параметр, а ε – параметр, характеризующий амплитуду внешнего воздействия. Это уравнение можно также записать в виде двумерного отображения с однонаправленной связью (по принятой в математических работах терминологии – в виде «косой системы»), а именно:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \lambda - x_t^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_t) \equiv f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} &= y_t + \omega \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой формулировке параметр ϕ соответствует начальному значению y : $2\pi y_0 = \phi$. Рис. 1 иллюстрирует основные режимы, наблюдаемые в данной модели.

Предположим сначала, что значение управляющего параметра λ таково, что в отсутствие воздействия ($\varepsilon=0$) отображение имеет устойчивую неподвижную точку. При слабом квазипериодическом воздействии эта неподвижная точка превращается в устойчивую гладкую замкнутую инвариантную кривую. Допуская

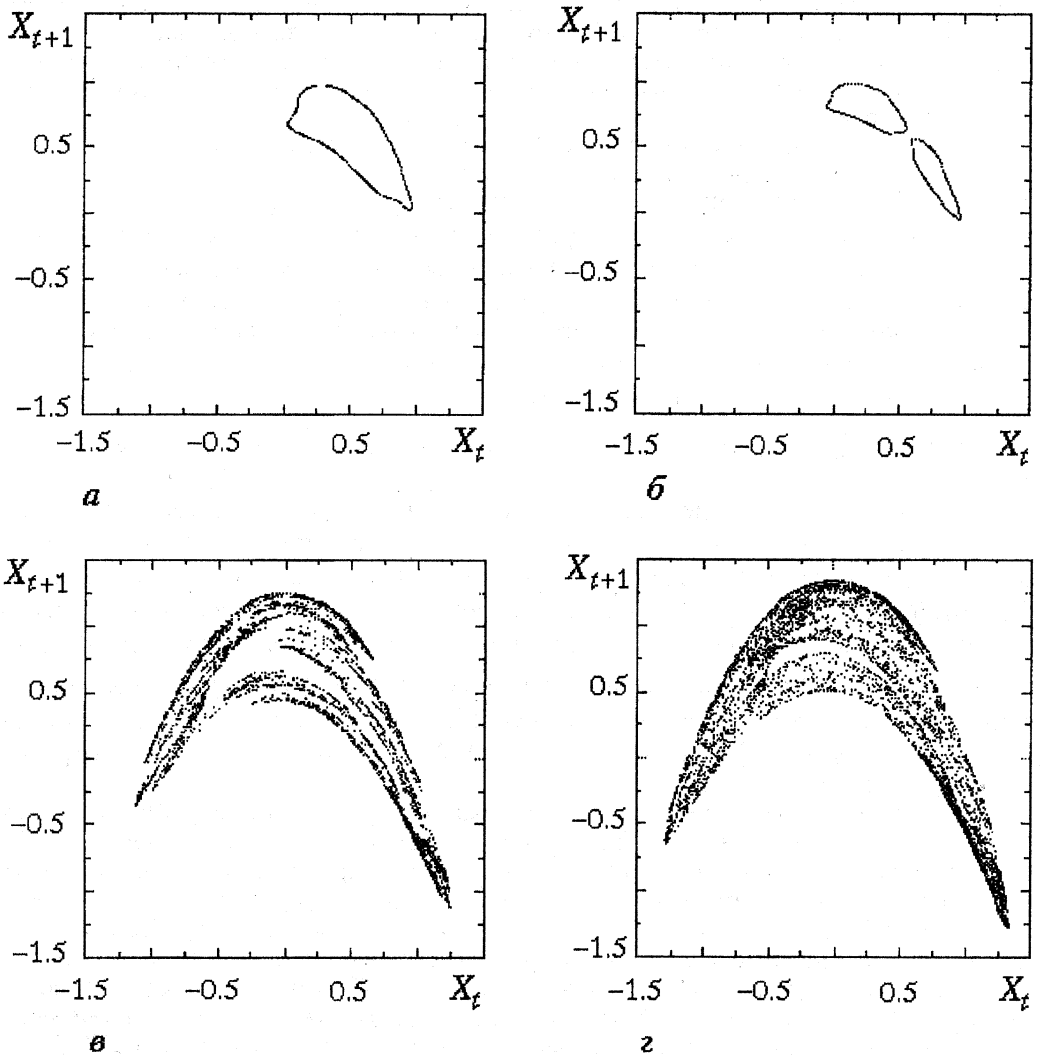


Рис. 1. Итерационные диаграммы аттракторов, отвечающих различным типам динамических режимов в логистическом отображении с внешним квазипериодическим воздействием: а – тор T1 при $\varepsilon=0.3$, $\lambda=0.9$; б – тор T2 при $\varepsilon=0.15$, $\lambda=0.9$; в – странный нехаотический аттрактор при $\varepsilon=0.45$, $\lambda=0.8$; г – хаос при $\varepsilon=0.45$, $\lambda=0.9$

ставшее почти общепринятым огрубление терминологии, мы будем говорить об этом аттракторе как о торе T_1 (см. рис. 1, а).

Если теперь слабому квазипериодическому воздействию подвергается устойчивый цикл периода 2, то аттрактор состоит из двух замкнутых гладких кривых, и мы говорим о нем как об удвоенном торе T_2 (см. рис. 1, б).

При увеличении амплитуды воздействия может случиться, что гладкий тор превратится в странный нехаотический аттрактор [3,11]. При этом ляпуновский показатель, ассоциирующийся с динамической переменной x , остается отрицательным, но геометрическая структура аттрактора становится сложной, фрактало-подобной (см. рис. 1, в). Могут возникать также и хаотические режимы, которые распознаются по присутствию положительного ляпуновского показателя (см. рис. 1, г). Наконец, при достаточно больших λ и ϵ траектория, порождаемая отображением (1), может уйти на бесконечность.

На рис. 2 показана полученная с помощью компьютера карта динамических режимов на плоскости параметров (λ, ϵ) . Области различных режимов обозначены тонами серого цвета. Для точек на плоскости параметров, отвечающих каждому пикселу, вычислялся ляпуновский показатель и анализировалась фазовая чувствительность динамики [11], после чего тип режима идентифицировался как

- T – тор: отрицательный ляпуновский показатель в отсутствие фазовой чувствительности;
- SNA – странный нехаотический аттрактор: отрицательный ляпуновский показатель, но высокая фазовая чувствительность;
- C – хаос: положительный ляпуновский показатель.

На диаграмме можно видеть различные переходы от одного режима к другому: $T_1 \leftrightarrow T_2$, $T_1 \leftrightarrow SNA$ и т.д. Некоторые из этих переходов неплохо исследованы [10,16,31], другие еще нуждаются в изучении. Для нас, однако, главным предметом интереса будет «тройная точка», где сходятся области торов T_1 и T_2 , странного нехаотического аттрактора и хаоса.

2. Бифуркационная линия удвоения тора и ее конечная точка

При нулевой амплитуде воздействия $\epsilon=0$ уравнение (1) сводится к обычному логистическому отображению, которое демонстрирует при увеличении параметра λ последовательность бифуркаций удвоения периода. При включении воздействия бифуркации удвоения периода циклов превращаются в бифуркации удвоения торов. Чем меньше амплитуда воздействия ϵ , тем большее число бифуркаций удвоения тора можно наблюдать при увеличении параметра λ , однако при любом фиксированном ϵ это число конечно [27,28]. Удвоения торов наблюдались в численных расчетах [31] и в эксперименте [32]. Математическое рассмотрение содержится в работе [33].

На рис. 2 легко можно найти бифуркационную линию первого удвоения тора, которая начинается в точке $(3/4, 0)$. Стартуем из этой точки и будем увеличивать амплитуду воздействия, двигаясь вдоль бифуркационной линии. Пока амплитуда невелика, аттрактор, который образовался из неподвижной точки логистического отображения, целиком размещается в области $x > 0$ (рис. 3). По мере увеличения амплитуды занятая аттрактором область растет, так что минимум x , достигаемый на аттракторе, приближается к нулю. Наконец, аттрактор касается линии $x=0$. Этот момент соответствует, как мы аргументируем ниже, окончанию линии удвоения тора на плоскости параметров, то есть критической точке TDT.

До тех пор пока аттрактор расположен в области $x > 0$, отображение можно рассматривать как обратимое. При этом применима математическая теория, развитая в работе [33]. После касания тором линии $x=0$ в игру вступает необратимость логистического отображения, и это обстоятельство, как можно думать, должно изменить характер бифуркации.

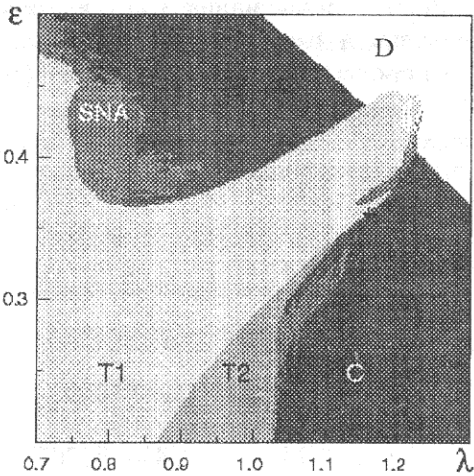


Рис. 2. Карта динамических режимов для логистического отображения с внешним квазипериодическим воздействием на плоскости управляющий параметр – амплитуда внешней силы. Области различных режимов обозначены тонами серого цвета. От белого к черному: расходимость D, тор T1, удвоенный тор T2, странный нехаотический аттрактор SNA, хаос C. Критическая точка TDT ($\lambda \approx 1.16, \epsilon \approx 0.36$) отмечена крестиком

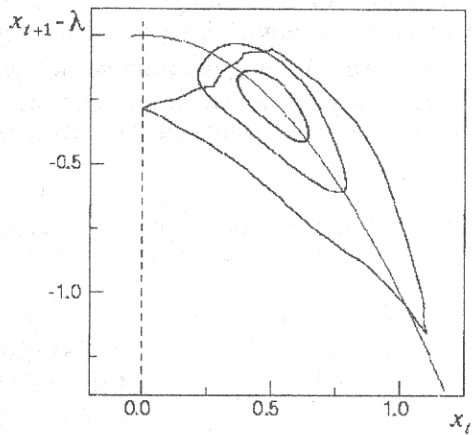


Рис. 3. Вид аттракторов на пороге бифуркации удвоения тора при различной амплитуде внешней силы: гладкие торы для $\epsilon=0.1, \lambda=0.778791$ и $\epsilon=0.2, \lambda=0.824501$, и критический тор для ϵ_c, λ_c . Для удобства визуального сравнения, начало отсчета по оси ординат сдвигается так, чтобы график логистического отображения оставался одним и тем же для всех значений параметров. Возникновение критического тора в точности соответствует моменту касания аттрактором линии $x_i=0$

Более конструктивная аргументация основана на использовании последовательных рациональных аппроксимаций для иррациональной частоты квазипериодического воздействия ω . В нашем случае, когда эта частота определяется золотым сечением, рациональные аппроксиманты (подходящие дроби) даются отношениями чисел Фибоначчи

$$\omega_k = F_{k-1}/F_k, \quad k=1,2,\dots, \quad (3)$$

$$F_0=0, \quad F_1=F_2=1, \quad F_{k+1}=F_k+F_{k-1}.$$

Задавая частоту воздействия рациональным числом ω_k , мы получаем вместо тора T1 некоторый цикл периода F_k . Если увеличивать λ , то мы ожидаем увидеть бифуркацию удвоения периода этого цикла при некотором значении параметра, и это значение надо рассматривать как аппроксимацию для точки бифуркации удвоения тора. На самом деле, для рациональных частот ω_k точка бифуркации будет зависеть от начальной фазы ϕ . О бифуркации удвоения тора мы вправе говорить только в том случае, если эта зависимость исчезает в асимптотике $k \rightarrow \infty$ (то есть если предел оказывается не зависящим от начальной фазы, ср. [34]). Такая ситуация заведомо реализуется при малых амплитудах воздействия ϵ .

Сформулируем теперь в терминах рациональных аппроксимаций условие того, что имеет место бифуркация удвоения и касание аттрактором линии $x=0$. Зафиксируем $\omega_k = F_{k-1}/F_k$ и потребуем, чтобы величины λ и ϵ были подобраны так, чтобы удовлетворялись следующие условия.

1. Для некоторой начальной фазы ϕ_c^k существует цикл периода F_k , стартующий из точки $x=0$ (отсюда следует, что этот цикл сверхустойчивый, то есть имеет нулевой мультипликатор), и что производная $dx/d\phi|_{0, \phi_c^k}$ равна нулю (это соответствует условию касания – малая вариация фазы в первом порядке не выводит точку цикла из $x=0$).

2. Наибольший по абсолютной величине мультипликатор, который достигается при некоторой другой величине начальной фазы ϕ_m^k , равен -1 , то есть для этой фазы цикл периода F_k находится на пороге бифуркации удвоения (это условие того, что аппроксимируемый тор должен претерпевать удвоение).

Второе условие может выполняться только для аппроксимаций с нечетными знаменателями, рассмотрением которых мы далее и ограничимся.

Таблица

Значения параметров, при которых наступает касание аттрактором линии $x=0$

ω_k	λ	ε	ϕ_c^k
2/3	0.89313590	0.39045526	2.38814031
3/5	1.07633288	0.30511453	2.27092915
8/13	1.14077398	0.35637173	2.47438570
13/21	1.13453832	0.35326266	2.51704366
34/55	1.15587157	0.36021207	2.48341089
55/89	1.15364997	0.35864970	2.47129447
144/233	1.15790681	0.36022344	2.48295110
233/377	1.15720706	0.35995120	2.48531755
610/987	1.15807555	0.36024655	2.48328049
987/1597	1.15792494	0.36019031	2.48259605
2584/4181	1.15809462	0.36024806	2.48321966
4181/6765	1.15806354	0.36023723	2.48335560
10946/17711	1.15809658	0.36024835	2.48323605

В таблице для нескольких последовательных k приводятся полученные численно значения параметров, при которых выполнены сформулированные условия. Видно, что найденные точки показывают тенденцию к сходимости. Оценивая предел, получаем точку TDT для отображения (1)

$$\lambda_c = 1.1580968 \quad \varepsilon_c = 0.3602485, \quad \phi_c = 2.48323, \quad (4)$$

где $\phi_c = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_c^k$.

Задав рациональную частоту воздействия ω_k и соответствующие значения параметров λ и ε из таблицы, мы будем иметь одновременно сверхустойчивый цикл для начальной фазы ϕ_2^k и цикл на пороге бифуркации удвоения периода для фазы ϕ_m^k . Ясно, что посредством сколь угодно малого сдвига по параметрам λ и ε из этой точки можно достичь такой ситуации, что цикл при одном значении фазы останется устойчивым, а при другом – потеряет устойчивость. Это значит, что система демонстрирует бифуркации в зависимости от фазы, как от параметра. Согласно результатам работы [11], это критерий того, что при переходе к пределу $k \rightarrow \infty$, когда воздействие станет квазипериодическим, в системе реализуется странный нехаотический аттрактор.

Из проведенного рассуждения следует, что режим, отвечающий странному нехаотическому аттрактору, можно отыскать в сколь угодно малой окрестности точки TDT. Расчеты показывают, что, кроме того, вблизи этой точки присутствуют также и хаотические режимы.

3. Ренормгрупповой анализ динамики в критической точке TDT

Для описания динамики в критической точке TDT и в ее окрестности обратимся к РГ анализу.

Поскольку частота квазипериодического воздействия определяется золотым сечением, целесообразно строить процедуру РГ преобразования, рассматривая операторы эволюции модельной системы за интервалы времени, даваемые последовательными числами Фибоначчи (ср. [13,35,36]). Основная идея состоит в том, чтобы представить отображение (2) за F_{k+2} шагов итераций через отображения, отвечающие F_{k+1} и F_k шагам

$$f^{F_{k+2}}(x,y) = f^{F_k}(f^{F_{k+1}}(x,y), y + F_{k+1}\omega). \quad (5)$$

Благодаря известному соотношению для золотого сечения

$$y + F_k\omega = y - (-\omega)^k \pmod{1}, \quad (6)$$

мы немедленно замечаем, что масштабную константу для перенормировки переменной y следует выбрать равной $(-\omega)$. Масштабный фактор для переменной x обозначим через a , и он будет определен ниже. Подставляя в (5) перенормированную функцию

$$g_k(x,y) = a^k f^{F_k}(a^{-k}x, (-\omega)^k y) \quad (7)$$

окончательно получаем преобразование РГ в виде

$$g_{k+2}(x,y) = a^2 g_k(a^{-1}g_{k+1}(x/a, -\omega y), \omega^2 y + \omega). \quad (8)$$

Чтобы выяснить природу решения уравнения (8), отвечающего критической точке TDT, был изучен характер поведения последовательности функциональных пар, порождаемых многократными итерациями РГ преобразования. Для этого функции $g(x,y)$ аппроксимировались полиномами достаточно высокого порядка (содержащими четные и нечетные степени y и только четные степени x), а РГ преобразование (8) было реализовано в виде компьютерной программы, которая позволяла найти набор коэффициентов разложения для функции g_{k+2} , исходя из известных коэффициентов для функций g_k и g_{k+1} .

В качестве начальных условий задавалась пара функций g_1 и g_2 , которые получаются из отображения (2) в критической точке TDT $(\lambda_c, \varepsilon_c)$ при перенормировке масштабов по x и y на факторы a и $(-\omega)$ для функции g_1 и a^2 и ω^2 для g_2 .

Расчеты показывают, что при подходящем выборе константы перенормировки a последовательность функций, порождаемых многократным РГ преобразованием, выходит на цикл периода 3.

Далее, это решение периода 3 уточнялось и, в конечном итоге, было найдено с достаточно высокой точностью путем численного решения конечномерной системы алгебраических уравнений, в которую превращается уравнение РГ при использовании полиномиальной аппроксимации (см. приложение). Полученная в процессе решения величина константы перенормировки для переменной x оказалась равной $a=1.5825935$.

Вследствие того, что период цикла, порождаемого уравнением РГ, равен 3, закономерности подобия (скейлинга) в критической точке TDT будут наблюдаться при пересчете масштабов в такое число раз, которое соответствует трехкратному РГ преобразованию. А именно, факторы скейлинга таковы:

- для времени: $\tau = \omega^{-3} = 4.23606\dots$,
- для переменной y : $\beta = (-\omega)^{-3} = -4.23606\dots$,
- для переменной x : $\alpha = a^3 = 3.96376\dots$

Рассмотрим теперь эволюцию под действием РГ преобразования малых возмущений найденного решения периода 3. Это позволит выявить свойства скейлинга, присущие окрестности точки TDT на плоскости параметров.

Линеаризация РГ преобразования (8) вблизи цикла периода 3 приводит к некоторой задаче на собственные векторы и собственные значения. Ясно, что при многократных итерациях РГ преобразования выживают только такие моды

возмущения, для которых собственные значения по абсолютной величине превышают единицу. Только они могут быть ответственными за изменение динамического поведения на больших временах при смещении по параметрам из критической точки.

Для численного решения задачи на собственные значения сначала была найдена конечномерная матрица производных от новых коэффициентов разложения функций g по старым коэффициентам, соответствующая трем шагам РГ преобразования. Далее, были вычислены собственные значения этой матрицы, из которых два наибольших оказались равными

$$\delta_1 = 10.5029..., \quad \delta_2 = 5.1881... \quad (9)$$

Эти факторы определяют свойства скейлинга плоскости параметров вблизи точки TDT, что будет продемонстрировано в следующем разделе.

Из других присутствующих в спектре собственных значений имеется два превышающих единицу по абсолютной величине, а именно, $-3.963... = -\alpha$ и $-4.236... = \beta$. Они, однако, являются несущественными. Первое из них соответствует возмущению, выводящему решение из класса коммутативных функциональных пар. Эта мода возмущения заведомо имеет нулевую амплитуду, поскольку исходная пара функций, к которой мы применяли РГ преобразование, принадлежит к коммутативному классу. Другому собственному числу отвечает решение линеаризованного уравнения РГ, порождаемое инфинитезимальным сдвигом по u . Следовательно, оно устраняется заменой переменных, а именно, смещением начала координат.

4. Скейлинг и фрактальная природа аттрактора в точке TDT

Пока мы двигаемся вдоль линии удвоения тора на плоскости параметров от малых амплитуд воздействия к точке TDT, аттрактор на всем пути представляется гладкой замкнутой инвариантной кривой (см. рис. 3). В критической точке она теряет гладкость и становится фрактальной кривой. Об аттракторе в этом случае мы говорим как о *критическом торе*. На рис. 4 этот критический тор изображен в координатах (x, y) .

Из РГ анализа следует, что критический тор должен демонстрировать свойство самоподобия в малых масштабах вблизи точки $x=0, y=y_c = \phi_c/2\pi$ и воспроизводить свою форму при одновременном увеличении масштаба в α раз по оси x и в β раз по оси y . На рис. 4, б, в представлены результаты проверки этого утверждения.

Из установленного закона подобия следует, что в точке $x=0, y=y_c$ кривая, представляющая критический тор, имеет сингулярность типа

$$x \sim |y - y_c|^\gamma, \quad \gamma = \log \alpha / \log \beta = 0.9539... .$$

Степень γ оказалась близкой к единице, поэтому визуально эта сингулярность выглядит как излом. Заметим, что вследствие эргодичности квазипериодического движения, наличие сингулярности в одной точке означает присутствие бесконечного плотного множества сингулярностей на критическом торе. Таким образом, заключение о фрактальной природе критического тора в конечном счете выводится из РГ анализа.

На рис. 5 представлены результаты исследования спектральных свойств критического тора. На рис. 5, а показан фурье-спектр временной последовательности x_n , генерируемой логистическим отображением под квазипериодическим воздействием в точке TDT. На рис. 5, б приводится спектр функции $x(y)$, описывающей форму критического тора. Это еще одна иллюстрация фрактальной природы аттрактора: амплитуды спектральных составляющих, как это хорошо видно в логарифмическом масштабе, убывают по степенному закону.

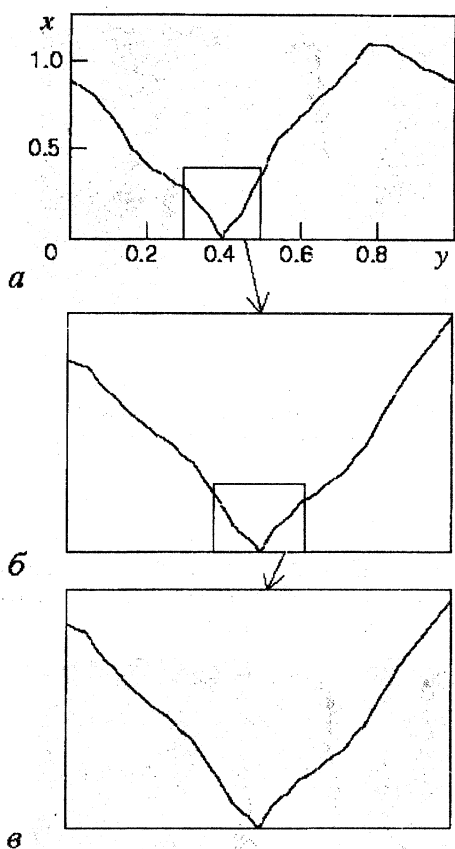


Рис. 4. Иллюстрация свойства скейлинга критического тора. На диаграмме *а* аттрактор представлен в координатах (x, y) . Часть картин-ки, попавшая внутрь небольшого прямоуголь-ника вблизи точки $(0, y_c)$ показана в увеличен-ном виде на диаграмме *б*, а ее часть, в свою очередь, на диаграмме *в*. Факторы увеличения α по горизонтальной и β по вертикальной осям

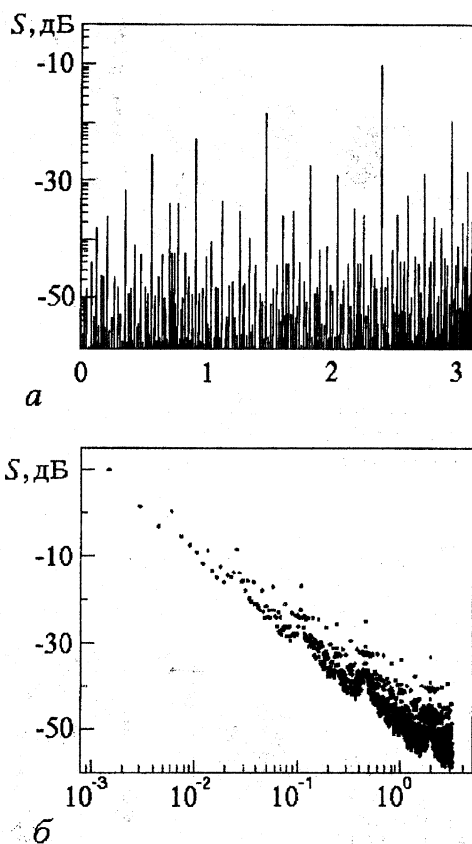


Рис. 5. Результаты спектрального анализа критического тора: *а* – Фурье–спектр последовательности, генерируемой логистическим отображением с внешним квазипериодическим воздействием, в критической точке TDT; *б* – спектр функции $x(y)$, определяющей форму критического тора

5. Свойства скейлинга карты динамических режимов на плоскости параметров вблизи точки TDT

Чтобы обнаружить свойства скейлинга, которыми в соответствии с результатами РГ анализа должна обладать окрестность точки TDT, на плоскости параметров надо определить удобную систему координат. За начало координат естественно взять саму точку TDT, а направления осей следует выбрать так, чтобы сдвиг по параметрам вдоль каждой оси приводил к появлению ровно одной определенной собственной моды в решении линеаризованного уравнения РГ. В такой системе координат конфигурация областей на плоскости параметров вблизи точки TDT должна воспроизводить себя при пересчете масштабов по двум координатным осям, соответственно, в δ_1 и δ_2 раз (см.(9)).

Фактически, одна координатная ось, отвечающая старшему собственному значению δ_1 , может быть выбрана почти произвольно, однако для второй оси направление должно быть тщательно подобрано так, чтобы полностью исключить вклад старшего собственного вектора. Численно были найдены следующие соотношения между скейлинговыми координатами C_1, C_2 и параметрами задачи (λ, ε) :

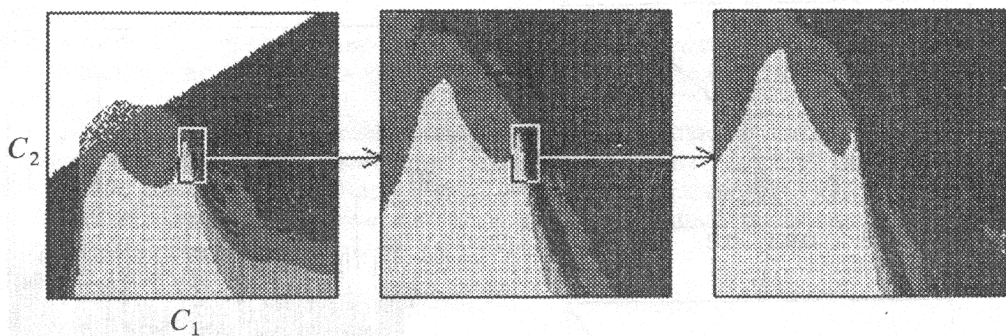


Рис. 6. Карта динамических режимов логистического отображения с внешним квазипериодическим воздействием в окрестности точки TDT, представленная в скейлинговых координатах C_1, C_2 . Переход от диаграммы *a* к *б* и от *б* к *в* соответствует увеличению на фактор δ_1 по горизонтальной и δ_2 вертикальной осям

$$\varepsilon = \varepsilon_c - C_1 + 0.3347C_2, \quad \lambda = \lambda_c + C_2. \quad (10)$$

На рис. 6 эти координаты использованы для представления устройства плоскости параметров вблизи критической точки – показаны области тора, странного нехаотического аттрактора и хаоса. На рис. 7 скейлинг на плоскости тех же

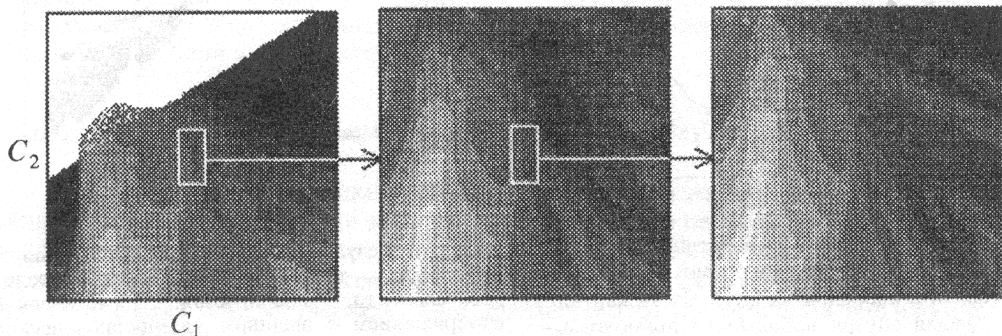


Рис. 7. Значения ляпуновского показателя на плоскости параметров C_1, C_2 (представлены тонами серого цвета). Критическая точка TDT находится в центре каждой диаграммы. Переход от диаграммы *a* к *б* и от *б* к *в* соответствует увеличению на факторы δ_1 по горизонтали и δ_2 по вертикали, а также изменению правила кодирования, соответствующему пересчету масштаба для ляпуновского показателя на фактор τ

параметров иллюстрируется для ляпуновского показателя, различные уровни которого показаны тонами серого цвета. При этом правило кодировки на каждом последующем уровне увеличения изменяется так, чтобы это отвечало пересчету масштаба ляпуновских показателей на фактор τ .

На обоих рисунках хорошо видно, что при увеличении по двум осям координат в δ_1 и δ_2 раз конфигурация плоскости параметров действительно демонстрирует ожидаемое свойство подобия. Это, в частности, означает, что все режимы, которые представлены на рис. 6 – тор, удвоенный тор, странный нехаотический аттрактор, хаос, будут реализоваться также и в сколь угодно малой окрестности точки TDT.

6. Эксперимент: критическая точка TDT в нелинейном колебательном контуре при двухчастотном внешнем воздействии

До сих пор в этой статье мы рассматривали модельную систему – логистическое отображение под внешним квазипериодическим воздействием.

Найденная и исследованная для этой модели точка TDT соответствует новому типу критического поведения при переходе от квазипериодической динамики к хаосу. Тот факт, что динамика модельного отображения согласуется с результатами РГ анализа, показывает, что оно является представителем соответствующего класса универсальности. Можно предположить, что этот класс будет включать системы более высокой размерности, например, подвергнутое внешнему квазипериодическому воздействию отображение Эно (Hénon map).

Очевидный интерес представляет возможность наблюдать критическое поведение, ассоциирующееся с точкой TDT, в эксперименте. По-видимому, для этой цели пригодна любая нелинейная диссипативная система, демонстрирующая при изменении параметра каскад удвоений периода, если на нее подействовать квазипериодической внешней силой.

Рассмотрим систему, ставшую одной из самых известных иллюстраций феноменов нелинейной динамики – колебательный контур, в котором вместо емкости включен полупроводниковый диод с р–п переходом [37–40]. Возбуждение контура осуществляется внешним источником переменного напряжения на некоторой частоте Ω_1 . При увеличении амплитуды этого внешнего воздействия A_1 в системе можно наблюдать переход к хаосу через каскад удвоений периода. Феноменологической моделью такой системы может служить, как известно, логистическое отображение.

Добавим теперь еще один воздействующий сигнал с амплитудой A_2 и частотой Ω_2 , причем $\Omega_2/\Omega_1 = (5^{1/2} - 1)/2$. Теперь феноменологической моделью будет логистическое отображение с квазипериодическим воздействием, то есть уравнение (1). Величина A_1 будет играть роль управляющего параметра λ , а A_2 – амплитуды воздействия ϵ .

На рис. 8 показана блок-схема экспериментальной установки, а на рис. 9 – полученная в эксперименте карта динамических режимов на плоскости параметров (A_1, A_2) . Экспериментальная установка включает в себя цепь RL с диодом, два генератора гармонических колебаний, сумматор и усилитель с низким выходным сопротивлением. Соотношение частот контролировалось с точностью до 4-го знака после запятой.

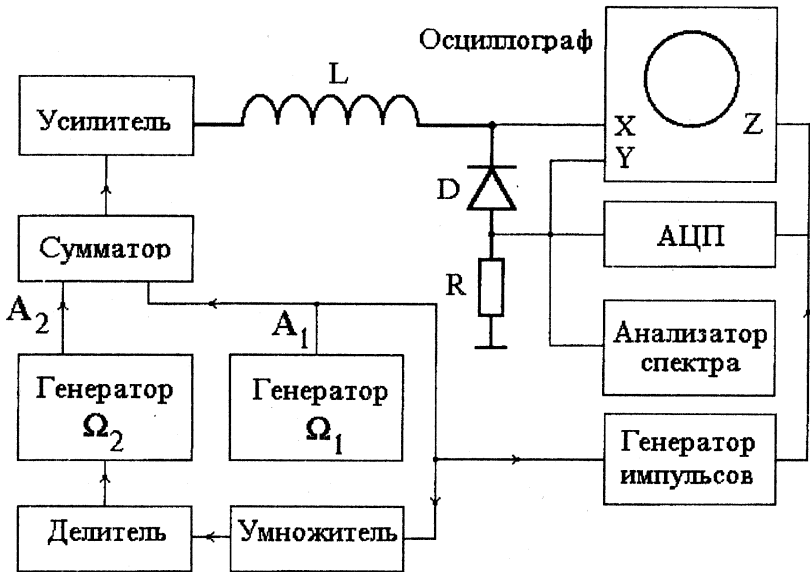


Рис. 8. Блок-схема экспериментальной установки. Управляющие параметры: A_1 и A_2 – амплитуды двух воздействующих на нелинейный контур гармонических сигналов с соотношением частот $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$

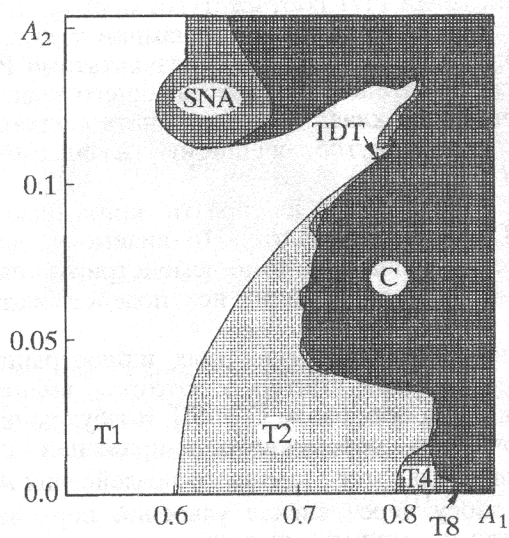


Рис. 9. Карта динамических режимов на плоскости параметров экспериментальной системы. По горизонтали и вертикали отложены амплитуды двух гармонических составляющих внешнего квазипериодического воздействия. T1, T2, T4 – области существования гладких торов, возникших на базе циклов с периодом T , $2T$ и $4T$, где $T=2\pi/\Omega_1$. Точка TDT отмечена крестиком

С помощью аналого-цифрового преобразователя генерируемый системой сигнал, пропорциональный току в контуре, вводился в компьютер, так что полученные реализации можно было обрабатывать и, в частности, строить итерационные диаграммы, аналогичные рис.1 и 3. Примеры таких диаграмм, отвечающих тору, удвоенному тору, SNA и хаосу, показаны на рис. 10.

Для определения типа динамического режима, реализующегося в системе при различных значениях параметров, привлекался следующий набор тестов.

- Наблюдался спектр генерируемого системой сигнала на экране анализатора спектра, что позволяло достаточно надежно идентифицировать хаотические режимы (сплошной спектр).
- Наблюдался фазовый портрет колебаний на экране осциллографа, что давало возможность визуально отслеживать бифуркации удвоения торов.
- Наблюдался портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, когда обеспечивалось кратковременное высвечивание

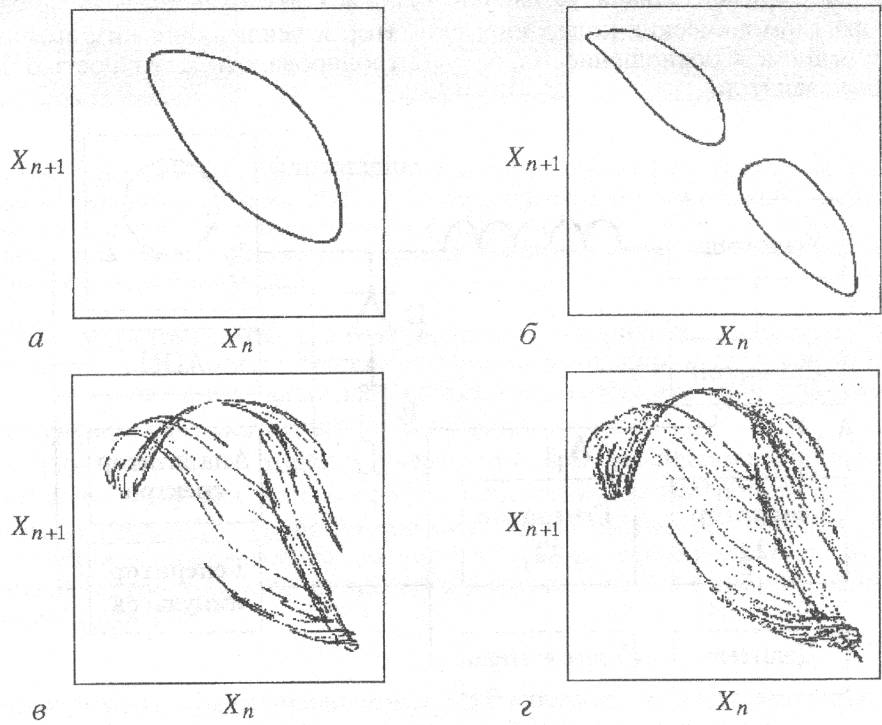


Рис. 10. Полученные в эксперименте примеры итерационных диаграмм для аттракторов, отвечающих: а – тору, б – удвоенному тору, в – SNA, г – хаосу. По осям координат отложены значения динамической переменной (тока в контуре) на двух последовательных временных шагах, где величина шага отвечает одному периоду «основного» воздействия, $T=2\pi/\Omega_1$

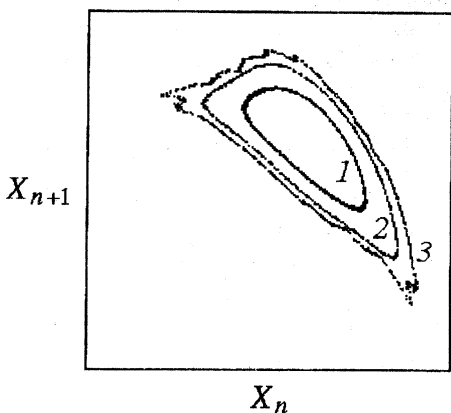


Рис. 11. Эволюция портрета аттрактора на итерационной диаграмме при движении по параметрам вдоль линии бифуркации удвоения тора: 1 – $A_1=0.647$, $A_2=0.06$; 2 – $A_1=0.705$, $A_2=0.09$; 3 – точка TDT, $A_1=0.755$, $A_2=0.108$. Оси координат такие же, как на рис. 10

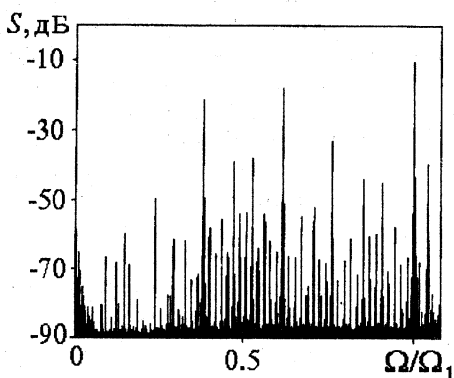


Рис. 12. Полученный в эксперименте спектр колебаний в точке TDT в нелинейном контуре при двухчастотном квазипериодическом воздействии с соотношением частот $\Omega_2/\Omega_1=(5^{1/2}-1)/2$

точек на экране осциллографа один раз за период основного сигнала $2\pi/\Omega_1$. При этом тору T1 отвечала гладкая замкнутая кривая, тору T2 – две замкнутых кривых и т.д. Потеря гладкости наблюдаемой кривой или ее размытие свидетельствовало о переходе к режиму SNA или к хаосу.

• Чтобы различать режимы, отвечающие гладкому тору и странному нехаотическому аттрактору, использовался также критерий, предложенный в работе [11]. Методом умножения и деления частоты Ω_1 обеспечивалось рациональное отношение частот воздействия $13/21$ (одна из подходящих дробей, аппроксимирующих золотое сечение) и тестировалось наличие или отсутствие бифуркаций в зависимости от разности фаз между двумя воздействующими сигналами; при этом их амплитуды поддерживались постоянными. Наличие бифуркаций считалось признаком присутствия SNA.

Карта динамических режимов, полученная в эксперименте, находится в замечательном качественном соответствии с рис. 2. В частности, на ней можно видеть бифуркационную линию, разграничивающую области тора T1 и удвоенного тора T2. Увеличивая уровень второго сигнала A_2 и подстраивая амплитуду первого A_1 так, чтобы оставаться на этой бифуркационной линии, в ходе эксперимента оказалось достаточно несложным отыскать точку TDT. На рис. 11 показано, как эволюционирует портрет аттрактора на итерационной диаграмме при изменении параметров, отвечающем движению вдоль линии удвоения тора (ср. рис. 3.) Можно видеть, что в точке TDT аттрактор принимает вид фрактало-подобной кривой с характерным изломом в крайней левой точке. На рис. 12 приведен спектр колебаний в точке TDT, вид которого качественно согласуется с рис. 5, а.

Таким образом, в эксперименте получено достаточно убедительное соответствие с результатами теоретического анализа, касающимися существования точки TDT, устройства пространства параметров вблизи этой точки и ассоциирующихся с ней особенностей динамики. В последующих публикациях мы предполагаем представить результаты более подробного экспериментального исследования.

Заключение

Исследуя динамику логистического отображения с квазипериодическим внешним воздействием, мы обнаружили новый интересный тип критического

поведения, связанный с точкой окончания линии бифуркации удвоения тора на плоскости параметров. В этой точке, обозначенной как TDT, соседствуют все основные динамические режимы системы – тор, удвоенный тор, странный нехаотический аттрактор, хаос. Аттрактор в точке TDT представляется в сечении замкнутой фрактальной кривой, скейлинговые свойства которой описываются с помощью метода ренормгруппы. Этот метод позволяет также выявить свойства подобия (скейлинга), присущие плоскости параметров в окрестности точки TDT.

Представленные в работе результаты экспериментов с нелинейным колебательным контуром под двухчастотным внешним воздействием качественно подтверждают основные выводы, полученные при теоретическом анализе. Поэтому можно полагать, что экспериментальная система и логистическое отображение с квазипериодическим воздействием относятся к одному и тому же классу универсальности. По-видимому, динамика многих других систем различной физической природы при наличии внешнего квазипериодического воздействия будет характеризоваться теми же закономерностями.

Замечательная особенность развитого анализа критической точки TDT состоит в том, что он соединяет проблематику перехода к хаосу через квазипериодические режимы и странные нехаотические аттракторы с концепциями ренормгруппы, универсальности и скейлинга.

Приложение

Решение уравнения РГ, найденное численно в виде полиномиальной аппроксимации

$$\begin{aligned}
 g_1(x,y) = & 1 - 0.8696325y + 1.7034283y^2 + 0.5184751y^3 - 0.4789622y^4 + 0.0421284y^5 + \\
 & + 0.0034728y^6 - 0.000263y^7 + 0.0140463y^8 - 0.0080038y^9 - 0.0027316y^{10} + \\
 & + 0.0021518y^{11} + 0.0006855y^{12} - 0.0006844y^{13} + 0.0000309y^{14} + 0.0001074y^{15} - \\
 & - 0.0000417y^{16} + 0.0000036y^{17} + 0.0000049y^{18} - 0.0000036y^{19} + 0.0000002y^{20} + \\
 & + 0.0000009y^{21} - 0.0000004y^{22} + 0.0000001y^{24} + x^2(-1.0048951 - 0.2989658y + \\
 & + 0.4635285y^2 - 0.1800907y^3 + 0.0725056y^4 - 0.0034337y^5 - 0.0295812y^6 + \\
 & + 0.0222803y^7 + 0.0030672y^8 - 0.0060644y^9 - 0.0010422y^{10} + 0.0022309y^{11} - \\
 & - 0.0005789y^{12} - 0.0001935y^{13} + 0.0001948y^{14} - 0.0000733y^{15} - 0.0000007y^{16} + \\
 & + 0.000019y^{17} - 0.0000064y^{18} - 0.0000034y^{19} + 0.000003y^{20} - 0.0000003y^{21} - \\
 & - 0.0000006y^{22} + 0.0000003y^{23}) + x^4(-0.0719259 + 0.1020951y - 0.0977675y^2 + \\
 & + 0.0127913y^3 + 0.0179438y^4 - 0.0215106y^5 + 0.0018414y^6 + 0.0062829y^7 - \\
 & - 0.0001449y^8 - 0.0026948y^9 + 0.001565y^{10} - 0.000213y^{11} - 0.0002682y^{12} + \\
 & + 0.0002255y^{13} - 0.0000623y^{14} - 0.0000278y^{15} + 0.0000236y^{16} + 0.0000016y^{17} - \\
 & - 0.0000079y^{18} + 0.000003y^{19} + 0.0000007y^{20} - 0.0000011y^{21} + 0.0000004y^{22} - \\
 & - 0.0000001y^{24}) + x^6(0.0298854 - 0.0071445y - 0.0013898y^2 + 0.0082485y^3 - \\
 & - 0.0037254y^4 - 0.0030119y^5 + 0.0011017y^6 + 0.0013475y^7 - 0.0017233y^8 + \\
 & + 0.0008162y^9 + 0.0000272y^{10} - 0.0002698y^{11} + 0.0001551y^{12} - 0.0000044y^{13} - \\
 & - 0.000034y^{14} + 0.0000084y^{15} + 0.0000092y^{16} - 0.0000077y^{17} + 0.0000012y^{18} + \\
 & + 0.0000016y^{19} - 0.0000013y^{20} + 0.0000002y^{21} + 0.0000001y^{22} - 0.0000001y^{23}) + \\
 & + x^8(-0.0009862 - 0.0009571y + 0.0016498y^2 + 0.0007036y^3 - 0.0007539y^4 - \\
 & - 0.0000808y^5 + 0.0008704y^6 - 0.0008208y^7 + 0.0002472y^8 + 0.0001168y^9 - \\
 & - 0.0001601y^{10} + 0.000051y^{11} + 0.000019y^{12} - 0.0000164y^{13} - 0.0000033y^{14} + \\
 & + 0.0000095y^{15} - 0.0000047y^{16} - 0.0000004y^{17} + 0.0000018y^{18} - 0.0000009y^{19} + \\
 & + 0.0000002y^{21}) + x^{10}(-0.000238 - 0.0000766y + 0.0001892y^2 - 0.0001571y^3 - \\
 & - 0.0001555y^4 + 0.0003732y^5 - 0.0002338y^6 + 0.0000302y^7 + 0.0000757y^8 - \\
 & - 0.0000553y^9 + 0.0000038y^{10} + 0.0000124y^{11} - 0.0000033y^{12} - 0.000006y^{13} + \\
 & + 0.0000061y^{14} - 0.0000016y^{15} - 0.0000011y^{16} + 0.0000013y^{17} - 0.0000004y^{18} - \\
 & - 0.0000001y^{19} + 0.0000001y^{20}) + x^{12}(-0.0000117 + 0.0000399y - 0.0000178y^2 - \\
 & - 0.0000733y^3 + 0.0000866y^4 - 0.0000471y^5 - 0.000009y^6 + 0.0000264y^7 - \\
 & - 0.0000104y^8 - 0.0000035y^9 + 0.0000044y^{10} + 0.0000013y^{11} - 0.0000043y^{12} + \\
 & + 0.0000026y^{13} - 0.0000001y^{14} - 0.0000009y^{15} + 0.0000006y^{16} - 0.0000001y^{18}) + \\
 & + x^{14}(0.0000064 + 0.0000037y - 0.0000119y^2 + 0.0000157y^3 - 0.0000052y^4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0.0000053y^5 + 0.0000052y^6 - 0.0000006y^7 - 0.0000021y^8 + 0.0000006y^9 + \\
& + 0.0000015y^{10} - 0.0000019y^{11} + 0.0000007y^{12} + 0.0000002y^{13} - 0.0000005y^{14} + \\
& + 0.0000002y^{15}) + x^{16}(-0.0000016y + 0.0000017y^2 - 0.000001y^4 + 0.0000006y^5 + \\
& + 0.0000004y^6 - 0.0000005y^7 - 0.0000001y^8 + 0.0000007y^9 - 0.0000006y^{10} + \\
& + 0.0000001y^{11} + 0.0000001y^{12} + 0.0000001y^{13}) + x^{18}(-0.0000001 - 0.0000001y^3 + \\
& + 0.0000001y^5 - 0.0000001y^7 + 0.0000002y^8 - 0.0000001y^9);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(x,y) = & 1.2709296 - 1.4085003y + 1.332861y^2 + 0.6245053y^3 + 0.0515328y^4 - \\
& - 0.3434156y^5 - 0.1303952y^6 + 0.0549889y^7 + 0.0308226y^8 + 0.002276y^9 - \\
& - 0.0042775y^{10} - 0.0013037y^{11} + 0.0006066y^{12} - 0.0001329y^{13} - 0.0003479y^{14} + \\
& + 0.000003y^{15} + 0.0001395y^{16} + 0.0000533y^{17} - 0.0000219y^{18} - 0.000023y^{19} - \\
& - 0.0000031y^{20} + 0.000004y^{21} + 0.0000021y^{22} - 0.0000002y^{24} - 0.0000001y^{25} + \\
& + x^2(-0.9039355 - 0.3575287y - 0.1942313y^2 + 0.4121383y^3 + 0.2648099y^4 - \\
& - 0.0615008y^5 - 0.0612954y^6 - 0.0198487y^7 + 0.0059354y^8 + 0.0055224y^9 - \\
& - 0.0005322y^{10} + 0.0005321y^{11} + 0.0011416y^{12} + 0.0000732y^{13} - 0.000532y^{14} - \\
& - 0.000292y^{15} + 0.0000562y^{16} + 0.0001162y^{17} + 0.0000341y^{18} - 0.0000153y^{19} - \\
& - 0.0000144y^{20} - 0.0000028y^{21} + 0.0000013y^{22} + 0.000001y^{23} + 0.0000004y^{24} + \\
& + 0.0000001y^{25} - 0.0000001y^{27}) + x^4(0.1149239 - 0.1189743y - 0.1624286y^2 + \\
& + 0.0083472y^3 + 0.0353694y^4 + 0.0305969y^5 + 0.0020815y^6 - 0.0071632y^7 - \\
& - 0.001165y^8 - 0.0012989y^9 - 0.0016567y^{10} - 0.0002407y^{11} + 0.0008565y^{12} + \\
& + 0.000661y^{13} - 0.0000055y^{14} - 0.0002429y^{15} - 0.0001185y^{16} + 0.0000149y^{17} + \\
& + 0.0000392y^{18} + 0.0000149y^{19} - 0.000001y^{20} - 0.0000034y^{21} - 0.000002y^{22} - \\
& - 0.0000007y^{23} + 0.0000003y^{24} + 0.0000002y^{26}) + x^6(0.028873 + 0.0051215y - \\
& - 0.0030854y^2 - 0.0167439y^3 - 0.0065918y^4 + 0.0035108y^5 + 0.0017591y^6 + \\
& + 0.0017551y^7 + 0.0014699y^8 + 0.0003381y^9 - 0.0007513y^{10} - 0.000822y^{11} - \\
& - 0.0001399y^{12} + 0.0002682y^{13} + 0.0002075y^{14} + 0.0000204y^{15} - 0.0000557y^{16} - \\
& - 0.0000353y^{17} - 0.0000051y^{18} + 0.0000055y^{19} + 0.000005y^{20} + 0.0000023y^{21} + \\
& + 0.0000002y^{22} - 0.0000007y^{23} - 0.0000007y^{24} - 0.0000001y^{25} + 0.0000001y^{26} + \\
& + 0.0000001y^{27}) + x^8(-0.0015564 + 0.0030058y + 0.003232y^2 - 0.0004119y^3 - \\
& - 0.0006909y^4 - 0.0012182y^5 - 0.0008879y^6 - 0.0002836y^7 + 0.0003772y^8 + \\
& + 0.0006198y^9 + 0.0002252y^{10} - 0.00016y^{11} - 0.0002121y^{12} - 0.000066y^{13} + \\
& + 0.000042y^{14} + 0.0000472y^{15} + 0.0000158y^{16} - 0.0000038y^{17} - 0.0000075y^{18} - \\
& - 0.0000045y^{19} - 0.000001y^{20} + 0.000001y^{21} + 0.0000012y^{22} + 0.0000005y^{23} - \\
& - 0.0000001y^{24} - 0.0000002y^{25} - 0.0000001y^{26}) + x^{10}(-0.0004531 - 0.0000822y + \\
& + 0.00000042y^2 + 0.0004043y^3 + 0.000347y^4 + 0.000152y^5 - 0.000095y^6 - \\
& - 0.0002909y^7 - 0.0001729y^8 + 0.0000391y^9 + 0.0001323y^{10} + 0.0000751y^{11} - \\
& - 0.0000116y^{12} - 0.0000383y^{13} - 0.0000217y^{14} - 0.0000012y^{15} + 0.0000069y^{16} + \\
& + 0.0000057y^{17} + 0.000002y^{18} - 0.0000006y^{19} - 0.0000014y^{20} - 0.0000008y^{21} + \\
& + 0.0000003y^{23} + 0.0000002y^{24}) + x^{12}(0.0000300 - 0.0000499y - 0.000073y^2 - \\
& - 0.0000473y^3 + 0.0000012y^4 + 0.0000825y^5 + 0.0000749y^6 + 0.0000095y^7 - \\
& - 0.0000493y^8 - 0.0000475y^9 - 0.0000068y^{10} + 0.0000186y^{11} + 0.0000174y^{12} + \\
& + 0.0000049y^{13} - 0.0000036y^{14} - 0.0000049y^{15} - 0.0000025y^{16} + 0.0000012y^{18} + \\
& + 0.0000009y^{19} + 0.0000002y^{20} - 0.0000002y^{21} - 0.0000002y^{22}) + \\
& + x^{14}(0.0000055 + 0.0000063y + 0.0000051y^2 - 0.0000126y^3 - 0.0000181y^4 - \\
& - 0.0000093y^5 + 0.0000095y^6 + 0.0000179y^7 + 0.0000078y^8 - 0.0000046y^9 - \\
& - 0.0000087y^{10} - 0.0000046y^{11} + 0.0000007y^{12} + 0.0000028y^{13} + 0.0000021y^{14} + \\
& + 0.0000004y^{15} - 0.0000006y^{16} - 0.0000008y^{17} - 0.0000003y^{18} + 0.0000001y^{19} + \\
& + 0.0000002y^{20} + 0.0000001y^{21}) + x^{16}(-0.0000008 + 0.0000007y + 0.000002y^2 + \\
& + 0.0000024y^3 - 0.0000003y^4 - 0.0000038y^5 - 0.0000032y^6 + 0.0000026y^8 + \\
& + 0.0000023y^9 + 0.0000004y^{10} - 0.000001y^{11} - 0.0000011y^{12} - 0.0000005y^{13} + \\
& + 0.0000002y^{14} + 0.0000004y^{15} + 0.0000002y^{16} - 0.0000001y^{18} - 0.0000001y^{19}) + \\
& + x^{18}(-0.0000002y - 0.0000001y^2 + 0.0000004y^3 + 0.0000006y^4 + 0.0000003y^5 - \\
& - 0.0000004y^6 - 0.0000007y^7 - 0.0000003y^8 + 0.0000001y^9 + 0.0000004y^{10} + \\
& + 0.0000003y^{11} - 0.0000001y^{12} - 0.0000001y^{14}) + x^{20}(0.0000001y^5 + 0.0000001y^6 - \\
& - 0.0000001y^9).
\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-02-16414 и 96-02-16755).

Библиографический список

1. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339. (См. также: Ландау Л.Д. Собрание трудов. М.: Наука, 1969. С. 447.)
2. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 116.
3. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. D13. P. 261.
4. Bondeson A., Ott E., and Antonsen T.M. Quasiperiodically forced pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 2103.
5. Romeiras F.J., Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M., Grebogi C. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors // Physica. 1987. Vol. D26. P. 277.
6. Romeiras F.J., Ott E. Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing // Phys. Rev. 1987. Vol. A35. P. 4404.
7. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems // Phys. Rev. 1989. Vol. A39. P. 2593.
8. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimensions of strange nonchaotic attractors // Phys. Lett. 1989. Vol. A137. P. 167.
9. Kapitaniak T., Ponce E., Wojewoda J. Route to chaos via strange non-chaotic attractors // J. Phys. A. 1990. Vol. 23. P. L383.
10. Heagy J.F., Hammel S.M. The birth of strange nonchaotic attractor // Physica. 1994. Vol. D70. P. 140.
11. Pikovsky A., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors // CHAOS. 1995. Vol. 5. P. 253.
12. Feudel U., Kurths J., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced circle map // Physica. 1995. Vol. D88. P. 176.
13. Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U. Birth of a strange nonchaotic attractor: Renormalization group analysis // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. R1629.
14. Pikovsky A., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // J. Phys. A: Math., Gen. 1994. Vol. 27. P. 5209.
15. Ding M., Scott-Kelso J. Phase-resetting map and the dynamics of quasiperiodically forced biological oscillators // Int. J. Bif. Chaos. 1994. Vol. 4. P. 553.
16. Lai Y.-C. Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 57.
17. Nishikawa T., Kaneko K. Fractalization of torus revisited as a strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6114.
18. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.Н. Механизмы рождения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 34.
19. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O. Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. E. 1996. Vol. E53. P. 4451.
20. Ditto W.L. Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. Letters. 1990. Vol. 65. P. 533.
21. Zhou T., Moss F., Bulsara A. Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // Phys. Rev. E. 1992. Vol. A45. P. 5394.
22. Feudel U., Pikovsky A., Politi A. Renormalization of Correlations and Spectra of a Strange Nonchaotic Attractor // J. Phys. A. 1996. Vol. 29. P. 5297.
23. Ketoja J.A., Satija I.I., частное сообщение.
24. Feudel U., Pikovsky A.S., Zaks M.A. Correlation properties of quasiperiodically forced two-level system // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 1762.
25. Keller G. A note on strange nonchaotic attractors // Fundamenta Mathematicae. 1996. Vol. 151. P. 139.
26. Stark J., частное сообщение.

27. *Kaneko K.* Doubling of torus // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 1806.
28. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок – хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39. С.113.
29. *Arneodo A.* Scaling for a periodic forcing of a period–doubling system // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53. P. 1240.
30. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Renormalization group for the response function and spectrum of the period–doubling system // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 140. P. 166.
31. *Kaneko K.* Collaps of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Scientific, 1986.
32. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Разрушение квазипериодического движения за счет удвоений и стохастичность в системе связанных генераторов // *Изв.вузов. Радиофизика.* 1984. Vol. 27, № 5. С. 565.
33. *Broer H., Huitema G.B., Takens F., Braaksma B.L.J.* Unfoldings and bifurcations of quasi–periodic tori // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1990. Vol. 83. P. 1.
34. *Chastell P.R., Glendinning P.A., Stark J.* Locating bifurcations in quasiperiodically forced systems // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 200. P. 17.
35. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker. S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // *Physica.* 1982. Vol. D5. P. 370.
36. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 303.
37. *Linsay P.S.* Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47. P. 1349.
38. *Testa J., Perez J., Jeffries C.* Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator // *Phys.Rev.Lett.* 1982. Vol. 48. P. 714.
39. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // *РЭ.* 1987. Т. 32, № 12. С. 2558.
40. *Безручко Б.П.* Особенности возбуждения субгармонических и хаотических колебаний в контуре с диодом // *РЭ.* 1991. Т. 36, № 1. С.39.

*Институт радиотехники
и электроники РАН, Саратовский филиал
Институт теоретической физики и
и астрофизики, Потсдамский университет
Германия*

Поступила в редакцию 24.11.97

ON DYNAMICS OF NONLINEAR SYSTEMS UNDER EXTERNAL QUASI-PERIODIC FORCE NEAR THE TERMINAL POINT OF THE TORUS-DOUBLING BIFURCATION CURVE

B.P. Bezruchko, S.P. Kuznetsov, A.S. Pikovsky, Ye.P. Seleznev, U. Feudel

A logistic map under quasi–periodic force is investigated for the case of frequency given by the golden mean. It is found that the end point of torus–doubling bifurcation curve on the plane of control parameter and force amplitude is a critical point where regions of torus, doubled torus, strange nonchaotic attractor and chaos meet together. Attractor at this point is a fractal object – «critical torus». Using the renormalization group approach we reveal scaling properties both for the critical attractor and for the parameter plane topography near the critical point. We present also experimental results for electronic oscillator under quasi–periodic excitation and demonstrate qualitative correspondence with the theory.