Письма в ЖТФ, том 11, вып. 11 12 июня 1985 г.

ХАОТИЧЕСКИЕ АВТОВОЛНЫ

А.С. Пиковский

Автоволновые процессы в неравновесных распределенных системах с диффузией широко обсуждаются в последнее время в связи с задачами физики плазмы, теории горения, твердотельной электроники, биофизики и т.д. (см. обзоры [1, 2]). Большинство моделей одномерных автоволн задается параболическими уравнениями

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i(u_1, \dots, u_n) + D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где D_i – коэффициенты диффузии, $F_i(u_1, \dots, u_n)$ – нелинейные функции, описывающие динамику точечной (однородной) системы. Типы возможных автоволн определяются в основном поведением точечной системы. Например, если в точечной системе есть бистабильность (т.е. имеется два устойчивых состояния равновесия), то в распределенной системе наблюдается автоволна в виде перепада. Если же в точечной системе есть только одно устойчивое состояние равновесия, но в ответ на внешнее возмущение генерируется импульс конечной длительности, то в распределенной системе может распространяться уединенная стационарная автоволна.

В данной статье описывается новый класс автоволн – хаотические автоволны. Они возникают, если в точечной системе имеют место хаотические колебания. Подобные колебания экспериментально наблюдались в системах химической кинетики [3], джозефсоновских переходах [4] и других объектах, в которых возможна диффузия.

Аналогично регулярным автоволнам, можно выделить два типа хаотических автоволн – в виде перепада и уединенные. Хаотические волны в виде перепада возможны, если в точечной системе наблюдается обобщенная бистабильность типа „устойчивое состояние равновесия – хаос" (либо „хаос – хаос", „периодический режим – хаос"). При этом в пространстве имеются две бесконечные области с различным типом поведения, разделенные движущимся перепадом. Подчеркнем, что область хаоса является однородной только в статистическом смысле, поскольку режим пространственно – однородных стохастических колебаний в системе с диффузией неустойчив к неоднородным возмущениям [5]. Можно ожидать, что скорость движения перепада будет меняться хаотически вблизи некоторого среднего значения.

Хаотическая уединенная автоволна возможна, если в точечной системе наряду с устойчивым состоянием равновесия имеется метастабильное хаотическое множество [6]. Тогда в ответ на конечное возмущение точечная система генерирует в течение определенного промежутка времени хаотические колебания. При учете диффузии эти колебания начнут захватывать соседние области и будет распространяться автоволна, представляющая собой пакет хаотических

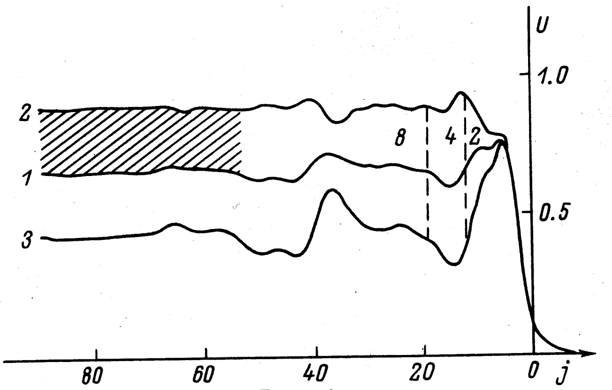

Рис. 1.

автоколебаний. Случайными здесь являются как форма, так и длительность импульса.

Оба типа хаотических автоволн наблюдались в численных экспериментах с двухкомпонентной дискретной моделью возбудимой среды

$$u_{n+1}(j)=\hat{L}_1 U(u_n(j),\ v_n(j)),$$
$$v_{n+1}(j)=\hat{L}_2 V(u_n(j),\ v_n(j)). \qquad (2)$$

Здесь n = 0, 1, 2, ... – дискретное время, j = ..., –1, 0, 1, 2,... – дискретная пространственная координата, $\hat{L}_{1,2}$ – диффузионные операторы, U, V – нелинейные функции. Точечная система здесь – двумерное отображение, которое можно интерпретировать как отображение последования для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейные диффузионные операторы $\hat{L}_{1,2}$ в фурье-представлении имеют вид $\hat{L}_{1,2}(k) = (1 + 2D_{1,2}(1 - \cos k))^{-1}$, где величины $D_{1,2}$ имеют смысл коэффициентов диффузии.

Для получения хаотической волны типа перепад достаточно одного уравнения (2). Функция U была выбрана в виде

$$U(u)=\frac{au(1-u)}{1+\exp(-b(u-u_0))}.$$

Численные расчеты выявили парадоксальный, на первый взгляд, результат: скорость перепада оказалась постоянной. Детальный анализ показал, что это связано со сложной пространственно-временной структурой волны. Эта структура показана на рис. 1. Профили решения (при a = 3.9; b = 20; u_0 = 0.1; D = 2) в разные моменты времени совмещались (по точке $u = u_0$): усреднение по полученному ансамблю дало средний профиль волны (кривая 1). Представление о размахе колебаний дают кривые 2, 3, отстоящие от кривой 1 на среднеквадратичное отклонение. При этом оказалось, что колебания профиля имеют статистически однородный хаотический характер только в заштрихованной области, т.е. вдали от фронта волны. Вблизи же фронта колебания периодические, причем их период по-

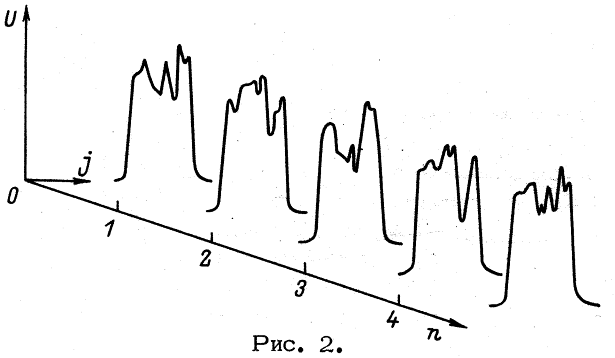

Рис. 2.

следовательно удваивается (рис. 1). Таким образом, формируется и распространяется волна удвоений периода. Какой-либо связи с универсальными свойствами удвоений периода в точечной системе нам обнаружить не удалось.

Хаотическая уединенная автоволна наблюдалась в двухкомпонентной системе (2) при учете диффузии только по переменной u ($D_2 \equiv 0$), для функций

$$U(u,v)=\frac{au(1-u)}{1+\exp(-b(u-u_0-v))}\quad V(u,v)=v+\varepsilon(u-v).$$

При $\varepsilon \ll 1$ переменная v меняется медленно. В результате передний фронт автоволны такой же, как в случае автоволны типа перепад. Задний фронт определяется тем, что с ростом v хаотические колебания переменной u становятся метастабильными и рано или поздно срываются. Динамика хаотической автоволны, полученной при $a = 3.9$; $b = 20$; $u_0 = 0.1$; $\varepsilon = 0.05$: $D = 0.35$ представлена на рис. 2. Хорошо видны стохастические изменения формы импульса; в некоторые моменты времени возможно „отщепление" довольно большого куска.

В заключение отметим, что аналогичные представления о хаотических автоволнах могут быть применены к двух- и трехмерным неравновесным средам. При этом представляется перспективным рассмотрение моделей типа (2), численное исследование которых гораздо проще, чем системы (1).

Литература

[1] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. – Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах. – УФН, 1979, т. 128, № 4, с. 625–666.

[2] Автоволновые процессы в системах с диффузией. Под ред. М.Т. Греховой. Горький: ИПФ АН СССР, 1981 г. 288 с.

[3] Simoyi R.H., Wolf A., Swinney H.L. One-dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction. – Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, N 4, p. 245–248.

[4] Г у б а н к о в В.Н., З и г л и н С.А., К о н с т а н т и н я н К.И., К о ш е л е ц В.П., О в с я н н и к о в Г.А. Стохастические колебания в туннельных джозефсоновских переходах. – ЖЭТФ, 1984, т. 86, № 1, с. 343–351.
[5] P i k o v s k y A.S. On the interaction of strange attractors. – Z. Phys. B, 1984, v. 55, N 2, p. 149–154.
[6] Y o r k e J., Y o r k e E. Metastable chaos: the transition to sustained chaotic behavior in the Loreuz model. – J. Stat. Phys., 1979, v. 21, N 3, p. 263.

Поступило в Редакцию
3 февраля 1985 г.