

# О СТРАННЫХ АТТРАКТОРАХ В ФИЗИКЕ

А. С. ПИКОВСКИЙ, М. И. РАБИНОВИЧ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Будучи открыты сравнительно недавно, странные аттракторы (СА) стали в последние два-три года предметом, вызывающим чрезвычайный интерес у физиков, химиков, радиотехников и специалистов по многим другим естественным и социальным наукам. Дело в том, что СА — это математический образ стохастических автоколебаний в конечномерных динамических системах. Под стохастическими (хаотическими) автоколебаниями мы будем понимать (по аналогии с данным Андроновым определением периодических автоколебаний [1]) установившиеся случайные процессы в неконсервативных динамических системах, поддерживаемые за счет регулярных (статических либо периодических) источников.

Сам термин «странный аттрактор» (*Strange attractor*) впервые появился в работе Рюэлля и Такенса [2], которые назвали таким образом притягивающие множества в фазовом пространстве, не являющиеся многообразиями. Сейчас, однако, термин СА связывается не столько с топологией притягивающего множества, сколько со случайностью поведения динамической системы на аттракторе [3, 4]. Мы не будем здесь стремиться придерживаться вполне строгих определений (см., например, [3]), считая, что всякий раз, когда в динамической системе устанавливается непериодический и неквазипериодический режим, траектория попадает на СА.

Самым популярным сейчас примером движения на СА является установившийся режим непериодических пульсаций, обнаруженный Эдвардом Лоренцем в сравнительно простой модели

$$\dot{X} = \sigma Y - \sigma X, \quad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY, \quad (1)$$

приближенно описывающей конвективные движения в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости [5, 6]. Система (1) оказалась весьма интересной как для математиков, так и для физиков. Например, Хакен и Грэхем свели к (1) уравнения одномодовой генерации твердотельного лазера [7], а Юдович показал, что (1)

можно интерпретировать как уравнения нелинейного осциллятора, частота которого инерционным образом зависит от энергии колебаний (см. также работу Шимицу, Мориока [8]).

Следует отметить, что интерес к модели (1) возродился лишь через 10 лет после опубликования работы [5]. Это, по-видимому, объясняется тем, что специалистам по теории обыкновенных дифференциальных уравнений никаких других аттракторов, кроме состояния равновесия и предельных циклов (объектов, характерных для систем 2-го порядка), известно не было. За последние же 15 лет благодаря усилиям Смейла, Вильямса, Аносова, Синая и других математиков выяснилось качественное отличие многомерных систем от двумерных. В частности, это отличие заключается в том, что многомерные системы в целых областях в пространстве параметров (более строго — в пространстве систем) могут характеризоваться стохастическим поведением.

Когда же понимание того обстоятельства, что стохастические движения в многомерных динамических системах отнюдь не патология и распространены столь же широко, как и предельные циклы, вышло за пределы узкого круга математиков, СА стали открываться один за другим. В многочисленных работах последних лет обнаружено много новых СА, имеющих отношение к различным физическим проблемам. Появились также надежды на то, что с помощью СА удастся описать турбулентность в распределенных (т. е. бесконечномерных) системах. Связь СА с гидродинамической турбулентностью обсуждается в недавно вышедших обзорах [9, 10].

В данной работе мы обсудим СА, возникающие в ряде физических ситуаций. Некоторое внимание будет уделено также их математической интерпретации.

## 2. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Представления о стохастичности динамических систем возникли много раньше появления первого СА. Было обнаружено, что хаотические движения, правда, не обязательно притягивающие<sup>1</sup>, возможны уже в системах третьего порядка, и в их возникновении важную роль играют гомоклинические структуры [12, 13]. Под гомоклинической структурой мы будем понимать окрестность гомоклинической траектории, возникающей в результате пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий (сепаратрис) седловых циклов или состояний равновесия. В системах с одной степенью свободы (фазовое пространство — плоскость) сепаратрисы одномерны и гомоклиническая траектория есть просто петля — выходящая из седла сепаратриса возвращается в него же.

<sup>1</sup> Заметим, что если не интересоваться процессами установления, то свойства стохастического движения в автоколебательной и консервативной системах могут оказаться идентичными, аналогично тому, как предельный цикл идентичен одной из замкнутых траекторий консервативной системы [11].

Такая гомоклиническая траектория исчезает при малом возмущении, т. е. не груба; примером служит уравнение

$$\ddot{u} - u + u^2 = 0, \quad (2)$$

фазовый портрет которого приведен на рис. 1. В трехмерном фазовом пространстве сепаратрисы периодического движения уже двумерны и гомоклиническая траектория представляет собой линию грубого пересечения двух поверхностей. Описание возникающей при этом гомоклинической структуры продемонстрируем на конкретных физических примерах.

1. Первый пример — это нелинейный осциллятор вида (2), на который действует внешняя сила

$$\ddot{u} - u + u^2 = \varepsilon \cos t. \quad (3)$$

Фазовое пространство этого уравнения трехмерно. Совпадавшие при  $\varepsilon = 0$  устойчивая и неустойчивая сепаратрисные поверхности при  $\varepsilon \neq 0$  уже различаются, и при их пересечении образуется грубая гомоклиническая траектория (рис. 2). Для исследования поведения траектории в ее окрестности удобно перейти к рассмотрению отображения, порождаемого траекториями за период  $T = 2\pi$ . Оно имеет вид, представленный на рис. 3. Глядя на этот рисунок, можно понять, почему открывший гомоклиническую структуру Пуанкаре писал: «...пересечения образуют нечто вроде решетки, или ткани, или сетки с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна сама себя пересекать, но она должна изгибаться столь сложным образом, чтобы пересечь бесконечное число раз все петли сети. Приходится поражаться сложности этой фигуры, которую даже не пытаюсь начертить. Ничто не может дать нам лучшее представление о сложности проблемы трех тел и всех проблем динамики, где нет голоморфного интеграла и ряды Болина расходятся» [14].

Лишь сравнительно недавно было дано полное описание траекторий, лежащих в окрестности гомоклинической траектории [12, 15, 16]. Это описание символическое. Каждой траектории гомоклинической структуры ставится в соответствие траектория графа (рис. 4), т. е. бесконечная в обе стороны последовательность нулей и единиц. Нуль означает, что траектория проходит вблизи периодического движения, единица — что она делает оборот вблизи гомоклинической траектории. Основной гомоклинической траектории соответствует последовательность (...0001000...), другим гомоклиническим траекториям — последовательности, у которых слева и справа стоят нули, а в середине сколь угодно сложная последовательность из нулей и единиц; периодическим траекториям отвечают периодические последовательности.

Решения, соответствующие гомоклинической структуре, можно непосредственно наблюдать в эксперименте, если события будут разворачиваться не только во времени, но и в пространстве.

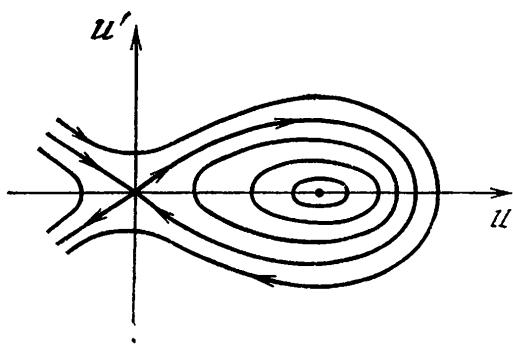


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (2)

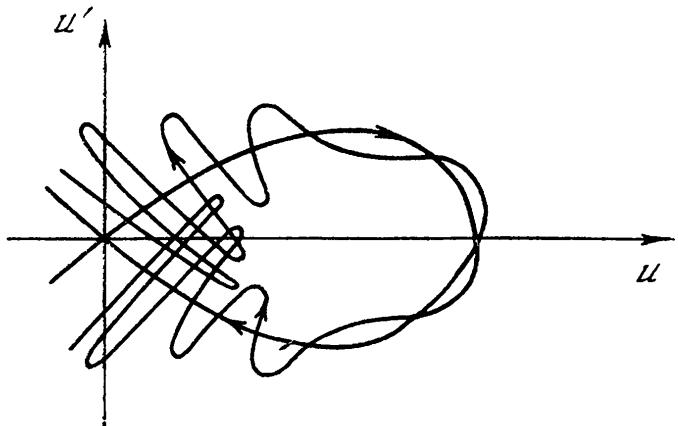
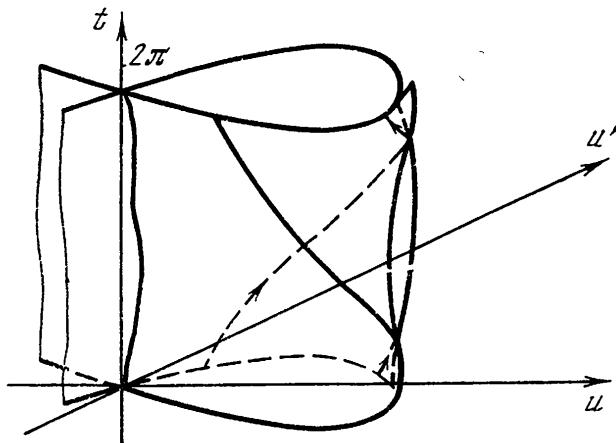


Рис. 2. Пересечение сепаратрисных поверхностей, приводящее к появлению грубых гомоклинических траекторий

Рис. 3. Отображение, порождаемое траекториями системы (3) за период (получается из рис. 2, если продолжить изображенные на нем сепаратрисные поверхности)

Такую замену  $t$  на  $\xi = x - t$  реализуют стационарные волны, распространяющиеся с единичной скоростью в нелинейной среде. Если среда описывается известным уравнением КДВ, то для стационарных волн получается уравнение (2); негрубая гомоклиническая траектория описывает уединенную волну — солитон [17]. Пусть теперь волны в нелинейной среде связаны с заданной синусоидальной волной, тогда получим

$$u_t + 2uu_x + u_{xxx} = \varepsilon \sin(t - x). \quad (4)$$

Для стационарных волн, синхронных с синусоидой, получается уравнение (3) (см., например, [18, уравнение (6.14)]).

Локализованным стационарным волнам соответствуют различные гомоклинические траектории — последовательности, у которых слева и справа нули, а в середине некоторые символы — единицы. Такие волны можно рассматривать как «случайный» набор солитонов, они могут реализоваться в безграничной среде. Экспериментально обычно исследуются ограниченные системы — резонаторы. В них стационарные волны должны быть периодическими, что соответствует разнообразным конечным последовательностям из нулей и единиц — периодическим траекториям графа рис. 4. Такие волны наблюдались в экспериментах [19, 20] (рис. 5).

2. Весьма важно, что обсуждавшаяся картина сложных движений по существу не меняется при учете затухания. Рассмотрим, например, маятник, на который действует периодическая сила

$$m\ddot{\phi} + g\dot{\phi} + l \sin \phi = I_a + I_b \sin \omega t. \quad (5)$$

Это же уравнение описывает точечный джозефсоновский контакт, через который пропускается ток  $I_a + I_b \sin \omega t$  [21]. Здесь  $\phi$  — разность фаз макроскопической волновой функции по обе

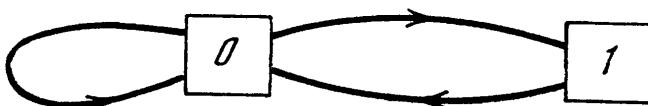


Рис. 4. Граф, отвечающий разрешенным последовательностям нулей и единиц

стороны контакта, связанная с напряжением  $V$  на нем:  $V = \hbar\dot{\phi}/2e$ ,  $m = \hbar C/2e$ ,  $g = \hbar G/2e$ , где  $C$  и  $G$  — соответственно емкость и проводимость контакта,  $l = I_0$  — критический ток. Определяющая макроскопические свойства контакта вольт-амперная характеристика выражает зависимость среднего по времени напряжения  $\langle V \rangle$  от постоянной составляющей тока  $I_a$ . В автономном случае (5) имеет лишь два притягивающих режима — статический с  $V = 0$  и периодический, для которого  $\langle V \rangle \sim \langle \dot{\phi} \rangle \neq 0$ . Переход от одного режима к другому с изменением  $I_a$  характеризуется гистерезисом. В неавтономном случае эти два режима разделены гомоклинической структурой, что приводит к непредсказуемости положения скачка на вольт-амперной характеристике. Эта случайность перехода наблюдалась при повторении эксперимента с одинаковыми начальными условиями [21].

Гомоклинические структуры имеют прямое отношение к СА. Например, при изменении параметра в системе Лоренца (1) гомоклиническая структура непосредственно предшествует возникновению СА [4]. Возможны ли СА, представляющие собой притягивающую гомоклиническую структуру, сейчас сказать трудно.

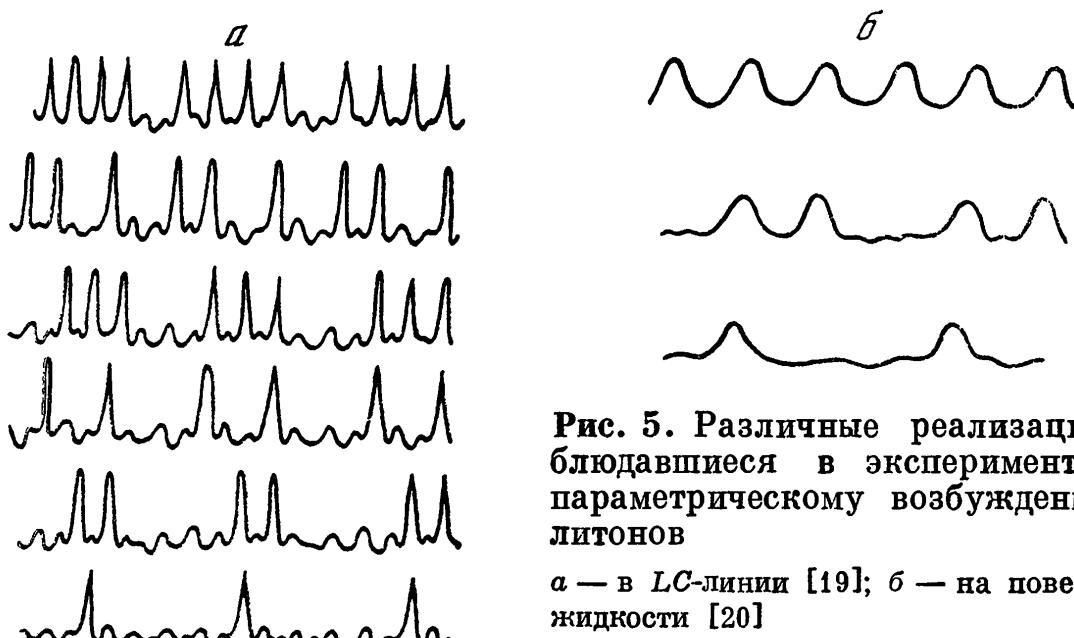


Рис. 5. Различные реализации, наблюдавшиеся в экспериментах по параметрическому возбуждению солитонов

*a* — в LC-линии [19]; *б* — на поверхности жидкости [20]

### 3. ПРИМЕРЫ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ

В этом разделе мы приведем ряд примеров притягивающей стохастичности, пока без математического обсуждения.

1. Одной из самых простых систем, демонстрирующих хаотическое поведение, является система с дискретным временем, переходящая из состояния  $x_i$  в состояние  $x_{i+1}$  по закону

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2. \quad (6)$$

Системы с дискретным временем — отображения — во многом аналогичны системам с непрерывным временем — обыкновенным дифференциальным уравнениям. Все явления, встречающиеся в отображениях, могут встретиться и в системах с непрерывным временем и наоборот (только размерности соответствующих систем должны быть разными). У отображений, например, могут быть как простые аттракторы (устойчивые неподвижные и периодические точки), так и странные.

Относительно невзаимно-однозначного отображения отрезка в себя (6) известно, что при каждом  $a$  оно имеет не более одной притягивающей периодической точки, в то время как поведение других точек может быть стохастическим [22].

У системы (6) состояние в момент времени  $i + 1$  непосредственно связано лишь с предыдущим состоянием. Если же учитывать хотя бы короткую историю, то получим уравнение  $x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + bx_{i-1}$ , которое удобно записать в виде системы [23]

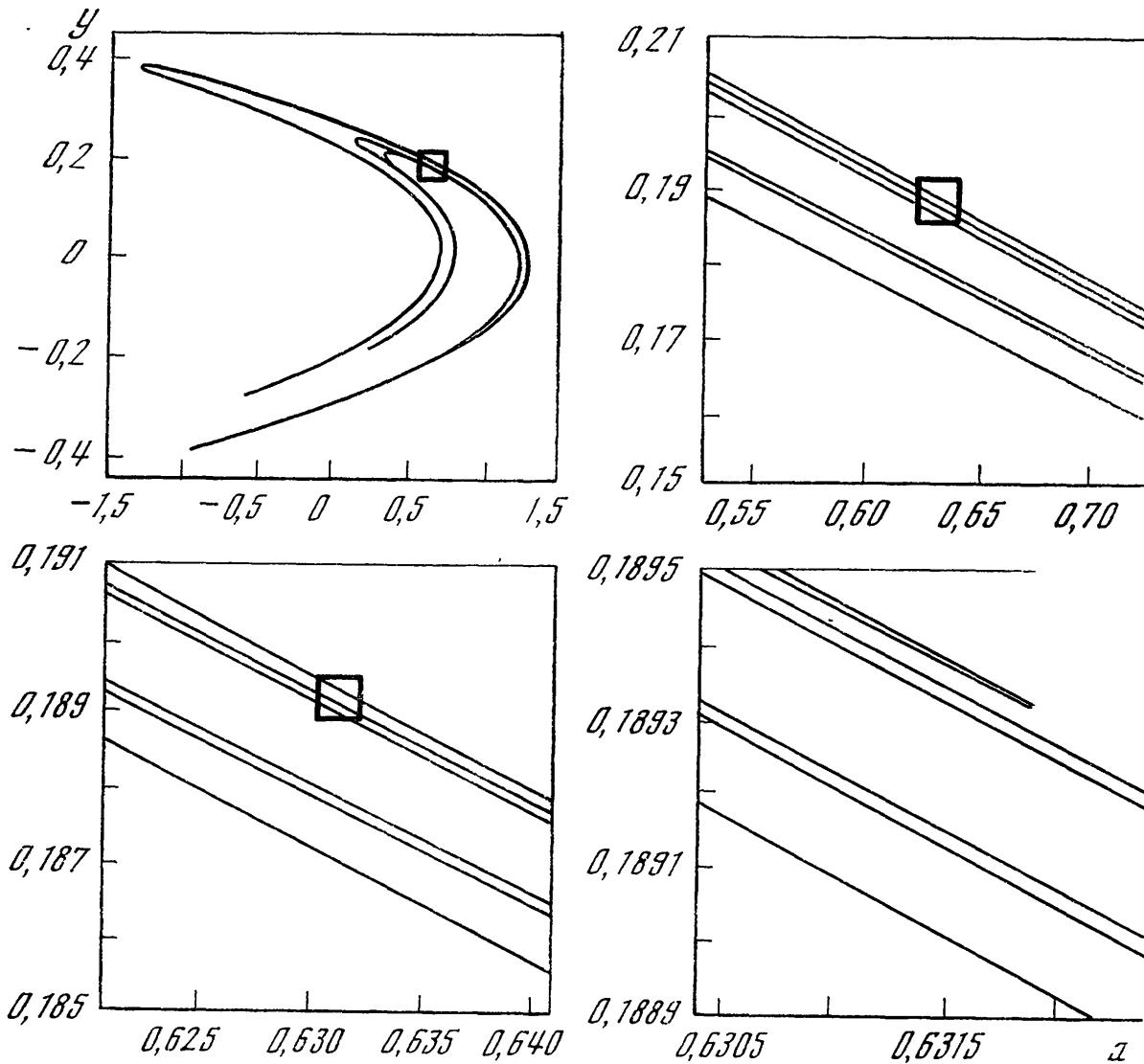
$$x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i. \quad (7)$$

Уравнения (7) определяют двумерное взаимно-однозначное отображение плоскости  $(x, y)$  в себя. Численный анализ (7), проведенный Хеноном при  $b = 0,3$ ,  $a = 1,4$ , убедительно продемонстрировал существование в этой системе СА — притягивающей области, имеющей сложную (канторовскую, см. [3]) структуру, показанную на рис. 6. Системы типа (6) и (7) довольно часто встречаются, например, в биологических и экологических задачах. Дискретность времени в таких задачах связана с сезонностью или сменой поколений [24].

2. Системы с дискретным временем удобны для изучения, но при решении конкретных задач чаще приходится иметь дело с СА в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Одна из таких систем относится к химической кинетике и была предложена Реслером [25]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= k_1 + k_2a - a(k_3b + k_4c)/(a + K), \\ b &= k_5a - k_6b, \\ \mu\dot{c} &= k_7a - k_8c - k_9c^2 - k_{10}c/(c + K') \quad (\mu \ll 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь переменные  $a$ ,  $b$  и  $c$  отвечают концентрациям реагентов, описываемых осциллятором Тьюринга и переключателем Эден-



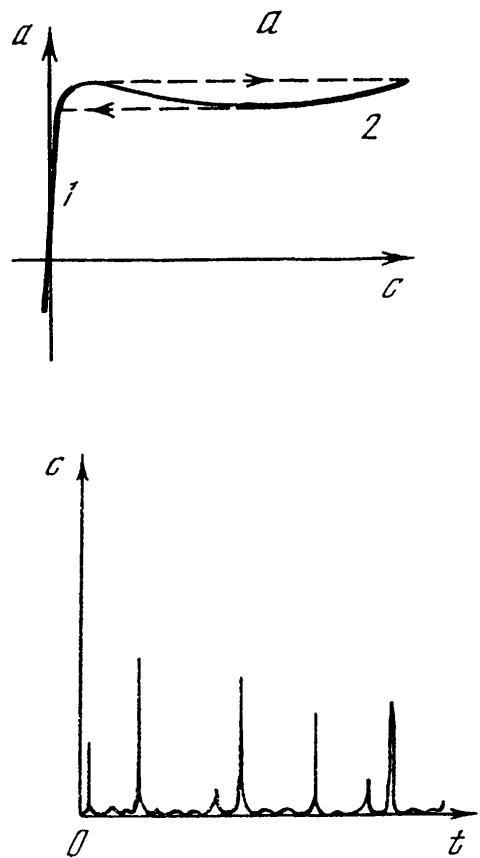
**Рис. 6.** Странный аттрактор в системе (7) [23]

Последовательное увеличение выделенных квадратиков показывает канторовскую структуру

штейна соответственно (см., например, [26]),  $k_i$  — коэффициенты  $K$  и  $K'$  — малые постоянные (с их помощью аппроксимируется ступенчатая функция). Ресслер наблюдал в системе (8) при  $k_1 = 37,8$ ,  $k_2 = 1,4$ ,  $k_3 = k_4 = 2,8$ ,  $k_5 = 2$ ,  $k_6 = 1$ ,  $k_7 = 8$ ,  $k_8 = 1,84$ ,  $k_9 = 0,0616$ ,  $k_{10} = 100$ ,  $K = 0,05$ ,  $K' = 0,02$ ,  $\mu = 0,0$  хаотические автоколебания. Механизм их генерации является общим для широкого класса систем «переключательного» типа, имеющих малый параметр при одной из производных. Траектория в такой системе состоит из медленных участков, лежащих на поверхности медленных движений, и быстрых — перескоков с одной части этой поверхности на другую [1, 11].

В системе (8) поверхность медленных движений (она задается соотношением  $c = 0$ ) состоит из участков 1 и 2 (рис. 7, a). Основные события разворачиваются на участке 1, близком к полуплоскости  $c = 0$ ,  $a < k_{10}/k_7$ . Положив  $c = 0$ , а также считая  $K = 1$  (это можно сделать, так как на аттракторе всегда  $a > 0$ ), получим уравнение осциллятора Тьюринга на поверхности медленных движений  $\dot{b} - 0,4\dot{b} + 4,2b = 75,6$ .

Рис. 7. Поверхность медленных движений (а) и результат численного интегрирования (б) системы (8) [25]



Это — неустойчивый фокус. Когда траектория, раскручиваясь, достигает края области 1, происходит срыв на участок 2 и после недолгого пребывания на нем перескок обратно в область 1, траектория снова раскручивается и т. д. Именно такую осциллограмму непериодических колебаний наблюдал Ресслер (рис. 7).

Системы с «переключателями» хорошо известны в радиотехнике — это схемы, генерирующие релаксационные колебания [1]. Естественно, можно построить и схему, генерирующую релаксационные стохастические автоколебания, аналогичные рис. 7. Такая схема была предложена нами в [27] (см. также раздел 4 и рис. 11).

3. Обсудим теперь несколько СА, близких (по виду уравнений) к точно интегрируемым нелинейным системам. Они получаются из консервативной системы гидродинамического типа (описывающей, например, вращение твердого тела с одной закрепленной точкой [28, 29]) добавлением лишь линейных членов. К этому классу относится система Лоренца (1), а также уравнения, описывающие распадное ограничение параметрически возбуждаемых волн [30]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= hY - v_1 X - YZ; & \dot{Y} &= hX - v_2 Y + XZ; \\ \dot{Z} &= -Z + XY\end{aligned}\tag{9}$$

( $h$  пропорционально амплитуде накачки).

Остановимся здесь несколько подробнее на другой системе из этого же класса, которая исследована мало, хотя придумана была даже раньше, чем система Лоренца. Эта система связана с идеей Булларда о моделировании магнитогидродинамического динамо с помощью сосредоточенной системы, состоящей из дисков и ка-

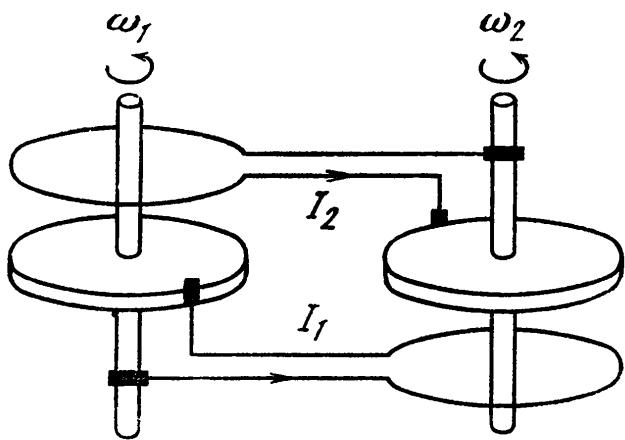


Рис. 8. Два связанных дисковых динамо [32]

тушек [31]. Конкретное описание интересующего нас случая было дано Рикитэйком [32] и Алланом [33]. Модель, изображенная на рис. 8, состоит из двух дисков, вращающихся с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в магнитных полях, создаваемых катушками с токами  $I_2$  и  $I_1$  соответственно. Ток  $I_1$  ( $I_2$ ) снимается с периферии и оси диска  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ). Если пренебречь трением в осях дисков, уравнения примут следующий вид:

$$LI_{1,2} + RI_{1,2} = \omega_{1,2}MI_{2,1}; \quad C\dot{\omega}_{1,2} = G - MI_1I_2. \quad (10)$$

Здесь  $L$  и  $R$  — индуктивности и сопротивления катушек;  $M$  — коэффициент взаимоиндукции катушки с диском;  $C$  — момент инерции диска;  $G$  — приложенный извне момент. Заменой  $I_{1,2} = \sqrt{G/M}x_{1,2}$ ,  $\omega_1 = \sqrt{GL/CM}(z + a)$ ,  $\omega_2 = \sqrt{GL/CM}(z - a)$ ,  $t = \sqrt{CL/GM}t'$  система (10) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \mu x_1 &= ax_2 + zx_2; \\ \dot{x}_2 + \mu x_2 &= -ax_1 + zx_1; \\ \dot{z} &= 1 - x_1x_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mu = \sqrt{R^2C/LG}$ ;  $a$  — параметр, определяемый начальными значениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Исследуя численно (11) при  $\mu = 0,1$ ,  $a = 1,875$ , Аллан [33] получил непериодические осцилляции, аналогичные тем, которые наблюдал в 1963 г. для своей системы Лоренц,— траектория раскручивается вокруг одного из состояний равновесия, затем переходит к другому, крутится вокруг него и т. д. (рис. 9).

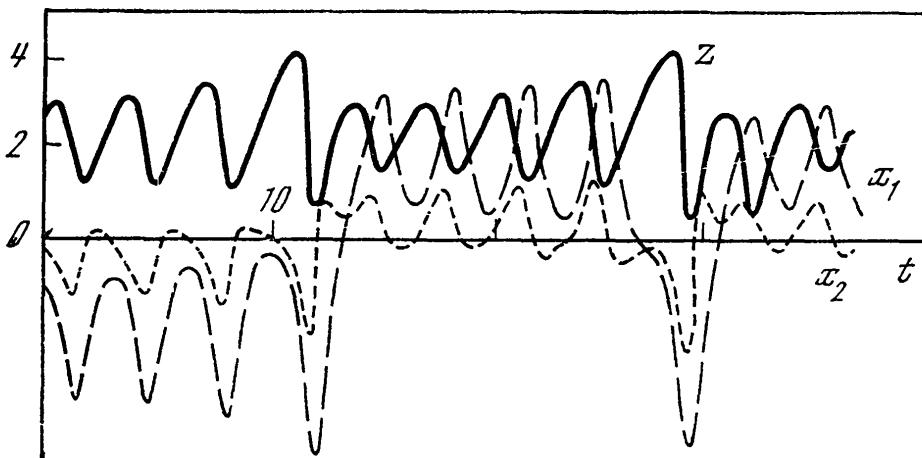
Однако система (11) обладает двумя неприятными свойствами. Во-первых, состояния равновесия в ней негрубые — одно собственное значение отрицательно, два других — чисто мнимые. Другое, еще более существенное свойство — наличие с собой прямой  $x_1 = x_2 = 0$ , по которой изображающая точка может уйти в бесконечность. Эта прямая принадлежит аттрактору, и то, что Аллан не наблюдал очень больших значений  $z$ , объясняется лишь малым временем интегрирования.

«Исправим» систему, добавив формально в уравнение для  $z$  малое затухание — слагаемое —  $\gamma z$ ,  $\gamma \ll 1$ . Тогда два прежних

состояния равновесия станут устойчивыми, и из бесконечности придет еще одно:  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $z = \gamma^{-1}$ . Получившаяся система аналогична (1) и (9). Важным общим свойством систем (1), (9) и «исправленной» (11) является их диссипативность: все траектории входят в ограниченный объем фазового пространства. Для системы (11), например, положив  $u = x_1^2 + x_2^2 + 2z^2$ , имеем

$$\dot{u} = -\gamma u + 2\gamma^{-1} - [(2\mu - \gamma)(x_1^2 + x_2^2) + \gamma(z - \gamma^{-1})^2].$$

Отбрасывая заключенные в квадратные скобки положительные слагаемые, получим  $\dot{u} \leq -\gamma u + 2\gamma^{-1}$ , т. е. все траектории вхо-



**Рис. 9.** Результат численного интегрирования системы (11) [33]

дят в эллипсоид  $u = 2\gamma^{-2}$ . Еще раз подчеркнем, что добавление затухания в уравнение (11) — искусственное и очевидного физического смысла не имеет. Если мы попытаемся ввести торможение дисков непосредственно в (10), то получим систему 2-го порядка, где стохастичности нет [33]. Возможно, однако, что стохастичность не исчезнет, если считать параметры дисков и катушек разными.

#### 4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

**1.** Мы уже отмечали, что реализация негрубых движений, затруднительная в сосредоточенных системах, довольно естественна в волновых задачах при постановке соответствующих краевых условий. Примерами могут служить солитоны в консервативных диспергирующих средах (им соответствуют гомоклинические траектории) и стационарные ударные волны в средах с диссипацией (им соответствуют гетероклинические траектории, соединяющие два различных состояния равновесия).

Наличие СА делает возможным существование новых типов стационарных волн. Выделим среди них следующие: 1) сложные периодические волны — замкнутые траектории, 2) локализованные случайные волны — различные гомоклинические траектории, 3) перепады со случайной структурой — траектории, соединяющие состояния равновесия с СА, 4) ударные волны со слу-

чайным фронтом — траектории, идущие от одного состояния равновесия к другому через стохастическую область, 5) периодические волны, переходящие в случайные, — траектории, идущие от цикла на СА. Стохастические стационарные волны возможны, например, в линии, изображенной на рис. 10. Уравнения, описывающие волны в такой линии, имеют вид (ср. [34, уравнение (3.6.4)])

$$\frac{\partial I}{\partial x} = gU - C \frac{\partial U}{\partial t} - I_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = - L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (12)$$

$$U = L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + rI_1 + U_1, \quad I_1 = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + i(U_1).$$

Для стационарных волн, зависящих лишь от  $\xi = t - x/V$ , имеем

$$I_\xi = k_1 I - k_2 I_1, \quad I_{1\xi} = k_3 I - k_4 I_1 - k_5 U_1,$$

$$C_1 U_{1\xi} = I_1 - i(U_1) \quad [(k_i > 0)]. \quad (13)$$

Система (13) исследовалась нами в [27], она, подобно уравнениям (8), демонстрирует стохастические релаксационные автоколебания. Эти автоколебания, в частности, могут быть и пространствен-

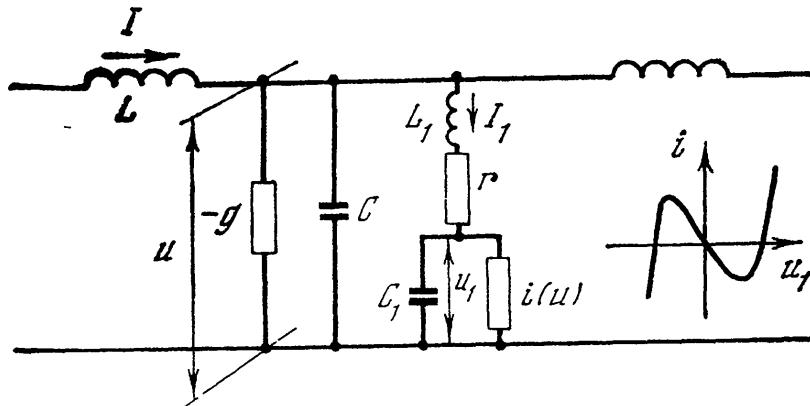


Рис. 10.  $LC$ -линия, описываемая уравнениями (12)

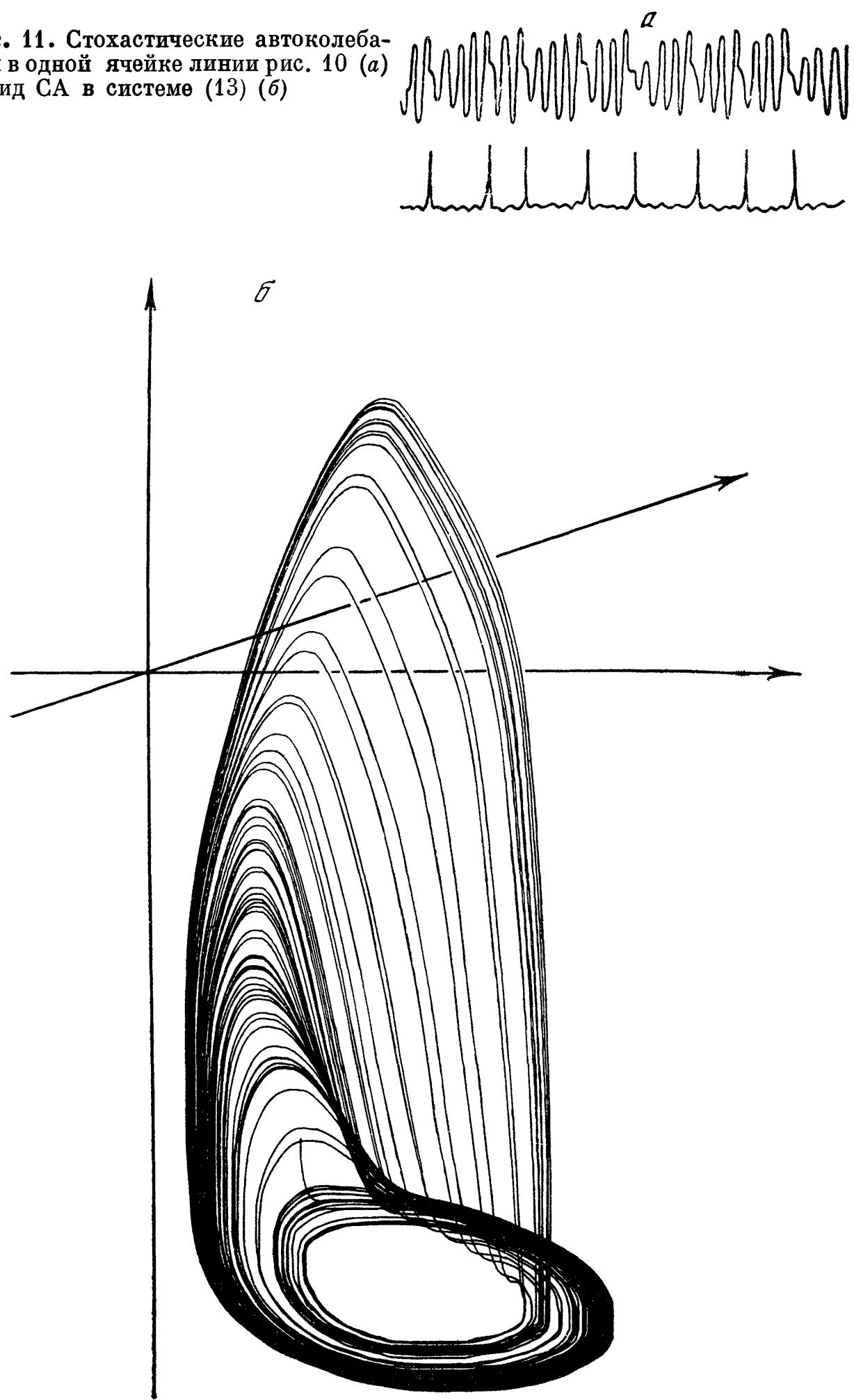
но-однородными — вся линия «дышит», как одна ячейка. Хаотический режим в такой ячейке удалось наблюдать экспериментально (рис. 11)<sup>2</sup>.

В заключение отметим, что теория стохастических стационарных волн сейчас находится еще в зачаточном состоянии; мы, однако, надеемся, что приведенные выше соображения пробудят к ней интерес.

2. Тот факт, что уравнения уже для стационарных волн дают стохастическое поведение, должен, естественно, как-то проявиться и в нестационарных процессах. Эти процессы исследуются, как правило, численно.

<sup>2</sup> Эти результаты получены совместно с С. В. Кияшко.

Рис. 11. Стохастические автоколебания в одной ячейке линии рис. 10 (а) и вид СА в системе (13) (б)



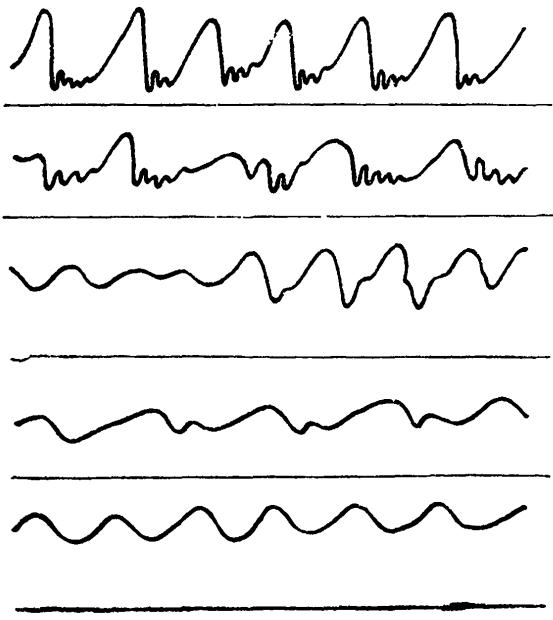


Рис. 12. Волны на вертикально стекающей пленке жидкости [39]

домцевым и Петвиашвили для ансамбля пилообразных волн [36]. Приведенную в [35] реализацию действительно можно интерпретировать как случайный набор пил. Уравнение (14) описывает волны, образующиеся при течении тонкой пленки вязкой жидкости по вертикальной плоскости [37, 38]. В экспериментах [39] наблюдались очень сложные волновые режимы (рис. 12). Не исключено, что эти режимы имеют отношение к стохастическим решениям (14). Однако детального сравнения теории и эксперимента пока нет.

Для теории нелинейных волн стало уже привычным, что практически все эффекты, имеющиеся для самих волновых полей, можно обнаружить и для огибающих. Не составляют исключения и стохастические волны.

Исследование распространения огибающей квазимохроматического пакета в консервативной нелинейной диспергирующей среде приводит к нелинейному уравнению Шредингера для комплексной амплитуды  $\psi$  [17]

$$i\dot{\psi} - \psi_{xx} - v|\psi|^2\psi = 0. \quad (15)$$

Для ряда задач представляет интерес учет в (15) неконсервативных слагаемых. Соответствующее уравнение численно исследовалось в [40]:

$$i\psi_t - 0,5\psi_{xx} - 4|\psi|^2\psi = i(\psi - |\psi|^2\psi + \psi_{xx}). \quad (16)$$

Уравнение (16), как и (14), имеет стохастические решения.

3. Во многих случаях для анализа нелинейных волновых процессов, как известно, удобен модовый подход. Замечательно, что число мод, взаимодействие которых приводит к стохастичности, может быть не очень велико.

В работе [41] стохастичность обнаружена в системе из 10 гар-

Рассмотрим, например, уравнение квазиродной волны в неравновесной среде

$$u_t + 2uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0; \quad (14)$$

зависимость инкремента спектральных компонент от волнового числа дается формулой  $\gamma(k) = k^2 - k^4$ . Уравнение (14) с периодическими граничными условиями  $u(x) = u(x + 819,2)$  численно исследовалось в [35], и действительно было обнаружено турбулентное состояние. Спектр  $\Phi(k) = \overline{|u_k|^2 t}$  в области  $k \geq 1$  был близок к  $\Phi(k) \sim k^{-2}$  — спектральному закону, выведенному Ка-

моник, связанных квадратичной нелинейностью, такой же, как и в уравнении (14). Предполагалось также, что инкремент  $\gamma(k)$  меняется линейно от  $\gamma(1) = \gamma_0$  до  $\gamma(10) = -\gamma_0$ . Численный расчет показал, что суммарная энергия мод лишь незначительно флюктуирует возле среднего значения, в то время как энергии отдельных мод случайным образом менялись на несколько порядков.

Стохастичность, как известно, может появиться и в системе из меньшего числа мод, в частности, странные аттракторы в системе двух взаимодействующих волн с учетом линейных и нелинейных расстроек описаны в [42].

## 5. ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

При исследовании конкретных систем аналитические методы (например, анализ устойчивости состояний равновесия, определение области «мешка», куда траектории только входят, и т. д.) не дают, как правило, ответа на вопрос о структуре аттрактора. Поэтому приходится прибегать к численному исследованию. При этом возникает проблема: как убедиться, что мы наблюдаем действительно СА? Для этого необходимо проверить, выполняются ли математические критерии стохастичности.

1. Одним из таких критериев является гиперболичность [3]. Говоря нестрого, гиперболичность означает, что все траектории — седловые, т. е. каждая из них имеет устойчивую и неустойчивую сепаратрисы. Устойчивая сепаратриса состоит из точек, которые постоянно приближаются к данной траектории при  $t \rightarrow \infty$ , неустойчивые — из тех точек, что приближаются к траектории при  $t \rightarrow -\infty$ . Термин «постоянно» означает, что приближение не должно сменяться хотя бы времененным уходом и наоборот. Требуется также, чтобы устойчивая и неустойчивая сепаратрисы непрерывно зависели от траекторий.

Свойство гиперболичности очень удобно для математического исследования. Доказано, в частности, что если СА гиперболичен, то 1) он структурно устойчив (груб); 2) имеется инвариантная эргодическая мера, к которой слабо сходится любое достаточно равномерное начальное распределение вероятностей; 3) эта мера не меняется, если на СА действуют малые шумы.

Гиперболические СА, как показали примеры, построенные Вильямсом и Плыкиным (см., например, [3]), существуют. Однако нам не известна ни одна конкретная динамическая система, в которой был бы обнаружен гиперболический СА.

Наиболее близок к гиперболичности аттрактор в системе Лоренца. Для него нарушается лишь непрерывная зависимость устойчивых и неустойчивых сепаратрис от траекторий. Поэтому некоторые следствия из гиперболичности сохраняются (существование инвариантной меры), а некоторые, например грубость, — нет.

На первый взгляд то, что СА в физической системе негрубый, т. е. его топологическая структура меняется при сколь угодно малом изменении параметров системы, делает его ненаблюдаемым. Однако отождествление наблюдаемости и грубости, естественное для двумерных систем, неверно для систем с большей размерностью фазового пространства. Дело в том, что с физической точки зрения тонкие особенности топологического устройства такого сложного объекта, как СА, не важны. На первый план здесь выдвигаются статистические свойства движения — время спадания корреляций, распределение инвариантной меры и т. д. Эти же свойства при возмущении системы могут меняться мало, т. е. являются грубыми (заметим, что соответствующие строгие формулировки нам здесь не известны).

2. Сложнее обстоит дело с аттрактором системы (11). Здесь нарушается самое важное, по сути, свойство, фигурирующее в определении гиперболичности, — постоянство растяжения и сжатия вдоль неустойчивых и устойчивых сепаратрис. Оказывается, устойчивые и неустойчивые сепаратрисы могут касаться. Подобная ситуация получила название «дикия гиперболичность». Исследовавший ее Ньюхаус показал, что дикия гиперболичность устойчива — малые возмущения не уничтожают касания [43].

Трудности, возникающие при исследовании дикой гиперболичности, связаны с тем, что внутри аттрактора могут существовать устойчивые циклы — для некоторых траекторий сжатие может оказаться сильнее растяжения.

Эта же сложность существенна для отображения (7). Оно содержит точки, вблизи которых происходит только сжатие, — это точки на отрезке  $x = 0$ . Однако численный анализ, проведенный Хеноном [23], достаточно убедительно показал, что траектории ведут себя хаотически. Мы исследовали (также численно) поведение двух близких траекторий. Оказалось, что примерно на четыре растягивающих отображения приходится одно сжимающее, но в среднем близкие точки расходятся. Ситуация здесь аналогична отображению (6), где из-за наличия критической точки, в которой  $dx_{i+1}/dx_i = 0$ , не исключено существование устойчивого цикла.

Возможно, в описанных случаях действительно существуют очень сложные, но устойчивые циклы. Тогда наблюдаемая экспериментально стохастичность может быть не собственной, а связанной с присутствием в системе малых шумов. Это различие, однако, будет проявляться лишь на больших промежутках времени, подобному тому, как проявляется различие между квазипериодическим движением и аппроксимирующим его «многооборотным» циклом [44].

Совсем еще недавно стохастическое поведение неконсервативных динамических систем если и наблюдалось, то связывалось исключительно с действием флуктуаций. Собственная же стохас-

тичность автоколебательных систем казалась чем-то совершенно невероятным. Трудно было себе представить, основываясь на привычном «двумерном» опыте, что устойчиво может существовать какой-либо другой аттрактор, кроме предельного цикла.

Открытие странных аттракторов и их широкое распространение в конкретных физических системах всего лишь за 4-5 лет существенно изменили эти представления. Как известно, всякая хорошая идея по мере своей разработки проходит три этапа признания: 1) «этого не может быть», 2) «это не доказано», 3) «это очевидно». Похоже, что странные аттракторы пройдут этот путь сравнительно быстро, уже сейчас для них довольно много доказано, и они, по-видимому, скоро минуют второй этап.

Менее оптимистичной представляется перспектива развития теории автоколебаний распределенных систем, и в частности теории гидродинамической турбулентности. Прогресс здесь может быть достигнут, например, на пути доказательства соответствия между турбулентным течением и конечномерным СА — это означает, что мы только подходим ко второй стадии и самые интересные результаты еще впереди.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А ндронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
2. Ruelle D., Takens F.— Communs Math. Phys., 1971, 20, N 3, p. 167.
3. Синай Я. Г.— В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 192.
4. Kaplan J. L., York J. A. Preprint, Univ. of Maryland, 1977.
5. Lorenz E. N.— J. Atmos. Sci., 1963, 20, p. 130.
6. McLaughlin J. B., Martin P. C.— Phys. Rev. A, 1975, 12, N 1, p. 186.
7. Haken H.— Phys. Lett., 1975, 53A, N 1, p. 77.
- 7a. Graham R.— Phys. Lett., 1976, 58A, N 7, p. 440.
8. Shimizu T., Morioka N.— Phys. Lett., 1978, 66A, N 3, p. 182.
9. Монин А. С.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 93.
10. Рабинович М. И.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 124.
11. А ндронов А. А. Собр. трудов. М., Изд-во АН СССР, 1956, с. 110.
12. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.
13. Moser J. Stable and random motions in dynamical systems. N. Y., Princeton, 1973.
14. Пуанкаре А. Избр. труды, т. 2. М., «Наука», 1972, гл. 33.
15. Шильников Л. П.— Мат. сб., 1967, 74 (116), № 3, с. 378.
16. Алексеев В. М.— 9-я летняя математическая школа. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1972, с. 212.
17. Кадомцев Б. Б., Карман В. И.— УФН, 1971, 103, № 2, с. 193.
18. Chester W.— Proc. Roy. Soc. London, 1968, A306, N 1484, p. 5.
19. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, № 8, с. 1195.
20. Chester W., Bones J. A.— Proc. Roy. Soc. London, 1968, A306, N 1484, p. 22.
21. Belykh V. N., Pederson N. F., Soerensen O. H. Report N 164, Lyngby, 1976.
22. Guckenheimer J.— Invent. Math., 1977, 39, p. 165.
23. Hénon M.— Communs Math. Phys., 1976, 50, p. 69.

24. *May R.* — Nature, 1976, 261, N 5560, p. 450.  
25. *Rössler O. E.* — Z. Naturforsch., 1976, 31a, S. 259.  
26. Глендорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флюктуаций. М., «Мир», 1973.  
27. Пиковский А. С., Рабинович М. И. — Докл. АН СССР, 1978, 239, № 2, с. 301.  
28. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Механика. М., «Наука», 1973.  
29. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.  
30. Пиковский А. С., Рабинович М. И., Трахтенберг В. Ю. — ЖЭТФ, 1978, 74, № 4, с. 1366.  
31. Bullard E. C. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, p. 774.  
32. Rikitake T. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, N 1, p. 89.  
33. Allan D. W. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, 58, N 4, p. 671.  
34. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., «Сов. радио», 1977.  
35. Yamada T., Kuramoto Y. — Progr. Theor. Phys., 1976, 56, p. 681.  
36. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. — Докл. АН СССР, 1973, 208, с. 794.  
37. Маурин Л. Н., Одшиария Г. Э., Точинин А. А. — В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, Ин-т теплофизики, 1977, с. 190.  
38. Петвиашвили В. И. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 5.  
39. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В. — В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, Ин-т теплофизики, 1975, с. 182.  
40. Kuramoto Y., Yamada T. — Progr. Theor. Phys., 1976, 56, p. 679.  
41. Flynn R. W., Manheimer W. M. — Phys. Fluids, 1971, 14, N 9, p. 2063.  
42. Дубровин В. И., Коган В. Р., Рабинович М. И. — Физ. плазмы, 1978, 4, № 5.  
43. Newhouse S. Preprint, I. H. E. S., 1977.  
44. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М., «Наука», 1972, с. 45.