Kapitel 2

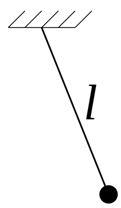
Lagrangesche Mechanik

Die Newtonsche Mechanik hat einige Nachteile.

1) Die Bewegungsgleichungen sind nicht kovariant, d.h. sie haben in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Form. Z.B., zweidimensionale Bewegungsgleichungen schreibt man in kartesischen Koordinaten als

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y$$

In Polarkoordinaten hat man dagegen sehr komplizierte Gleichungen, die auch $\dot{r}$, $\dot{\phi}$ erhalten.



2) Für einige Probleme sind die Newtonschen Gleichungen nicht unmittelbar anwendbar. Als Beispiel betrachten wir das ebene Pendel. Der Massenpunkt wird durch eine Stange der Länge l auf einer Kreisbahn gehalten. Die Beschränkung der Bahn kann man durch folgende Zwangsbedingung schreiben

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Die Stange übt eine Kraft aus, die wir nicht kennen. Beispiel: das Programm "xspringies", das unter LINUX läuft, läßt verschiedene Kräfte modellieren, nicht aber eine Pendelbewegung.

Um die Newtonsche Mechanik zu verallgemeinern, gehen wir von Minimumprinzip aus. Aus der Statik wissen wir, daß stationäre Zustände als Minima vom Potential beschrieben werden können. Und das Minimum wird Koordinatensystemunabhängig als $\nabla U = 0$ beschrieben. Wenn wir auch die Bewegung als Minimum darstellen wollen, sollten wir einen matematischen Formalismus haben, der die Minimum-Berechnung von Funktionen verallgemeinert.

2.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Ein freier Massenpunkt hat 3 Freiheitsgraden: der Zustand des Teilchens wird durch 3 Parametern bestimmt. Das n-Teilchen System braucht für die vollständige Beschreibung $3n$ Parametern, kann also $3n$ Freiheitsgrade haben. Häufig ist aber diese Zahl durch **Zwangsbedingungen** reduziert.

Definitionen:

1. **Zwangsbedingungen** sind Bedingungen, die die freie Bewegung der Massenpunkten einschränken. Das sind geometrische Bindungen: z.B. für das ebene Pendel gibt es die Zwangsbedingung $x^2 + y^2 = l^2$, es gibt nur einen Freiheitsgrad.

2. **Zwangskräfte** sind Kräfte die die Zwangsbedingungen bewirken, also die freie Bewegung behindern.

Zwei Probleme der Beschreibung eines mechanischen Systems:

1. Zwangskräfte sind im allgemeinen unbekannt, deswegen kann man das Gleichungssystem
$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{f}_i$$
nicht formulieren. Wir versuchen deshalb die Mechanik so umzuformulieren, daß die Zwangskräfte rausfallen.

2. Die Teilchenkoordinaten $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ sind nichtunabhängig voneinander. Wir wollen deswegen versuchen, die durch linear unabhängige **verallgemeinerte** Koordinaten zu ersetzen. Die sind in der Regel unanschaulicher, dafür werden aber die matematische Probleme viel einfacher.

2.1.1 Holonome Zwangsbedingungen

Holonome: aus Griecheschen “ganzgesetzliche”; skleronome: “gefrorene”; rheonome: “flussige”.

Holonome Zwangsbedingungen sind die Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und der Zeit in der Form:

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

Holonom-skleronome Zwangsbedingungen

Das sind Holonome Zwangsbedingungen die **nicht** explizit zeitabhängig sind:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0 \; .$$

Beispiel 2.1 *Hantel*
Der Abstand zwischen zwei Massenpunkten ist konstant:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$$

Beispiel 2.2 *Teilchen auf Kugeloberfläche*
Die Zwangsbedingung lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Holonom-rheonome Zwangsbedingungen

Das sind Holonome Zwangsbedingungen mit expliziter Zeitabhängigkeit:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \neq 0 \; .$$

Beispiel 2.3 *Teilchen im Aufzug*
Der Aufzug bewegt sich nach oben mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0. Das Teilchen kann sich nur in der (x, y)-Ebene frei bewegen. Für die z-Koordinate gilt die Zwangsbedingung

$$z(t) = v_0(t - t_0) + z_0 \; .$$

Beispiel 2.4 *Masse auf schiefer Ebene mit veränderlicher Neigung*
Die Holonom-rheonome Zwangsbedingung lautet:

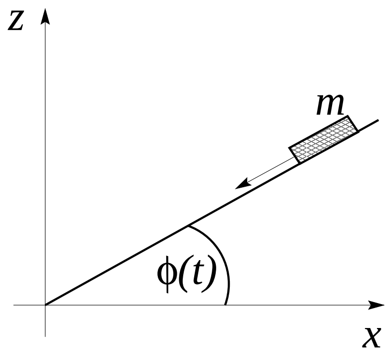
$$\frac{z}{x} - \tan(\phi(t)) = 0 \; .$$

Generalisierte Koordinaten

Also, wenn es k holonome Zwangsbedingungen gibt, dann reduzert sich die Zahl der Freiheitsgrade:

$$S = 3n - k \; .$$

Wir wollen die generalisierten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_s$ einführen, die zwei Bedingungen erfüllen müssen:



1. Der Zustand des physikalischen Systems ist durch $q_1, q_2, \ldots, q_s$ **eindeutig** festgelegt. Das heisst, es gelten die folgende Transformationsformeln

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$$

2. Die q_i sund unabhängig vonenenader, d.h. es gibt keine Beziehungen der Form $F(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0$

Bemerkungen:

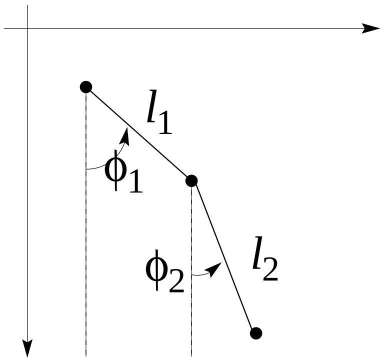
1. Man nennt $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ generalisierte Geschwindigkeiten.
2. Der Zustand des Systems für alle Zeiten wird durch einen Punkt im **Phasenraum** $q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ bestimmt.
3. Die Wahl der Größen q_i ist nicht eindeutig, wohl aber ihre Zahl.
4. Die Größen q_i sind beliebig, nicht nur Längen. Die beschreiben nicht mehr unbedingt Einzelteilchen.

Beispiel 2.5 *Teilchen auf Kugeloberfläche*
Die Zwangsbediengung lautet $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
Die Zahl der Freiheitsgrade: $S = 3 - 1 = 2$.
Als generalisierte Koordinaten bieten sich zwei Winkel an: $q_1 = \theta$, $q_2 = \phi$. *Die Transformationsformeln sind:*

$$x = R\sin(q_1)\cos(q_2)$$
$$y = R\sin(q_1)\sin(q_2)$$
$$z = R\cos(q_1)$$

(Einer Ort auf die Erdoberfläche wird durch Länge und Breite bestimmt.)

Beispiel 2.6 *Ebenes Doppelpendel*
Es gibt insgesammt 4 Holonom-skleronome Zwangsbedingungen: $z_1 = z_2 = const$



und

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

Die Zahl der Freiheitsgrade: $S = 6 - 4 = 2$.
Generalisierte Koordinaten: $q_1 = \phi_1$, $q_2 = \phi_2$. *Die Transformationsformeln*

$$x_1 = l_1 \cos(q_1) \qquad y_1 = l_1 \sin(q_1) \qquad z_1 = 0$$
$$x_2 = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) \qquad y_2 = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) \qquad z_2 = 0$$

erhalten implizit die Zwangsbedingungen.

2.2 Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichung

Eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Vorschrift, die jedem x-Wert eine Zahl (y-Wert) zuordnet. In der Variationsrechnung betrachtet man dagegen Funktionale, die jeder Funktion $q(t)$ eine Zahl (den Wert des Funktionals) zuordnet. Am häufigsten definiert man ein Funktional mit Hilfe des Integrals:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \ L(q(t))$$

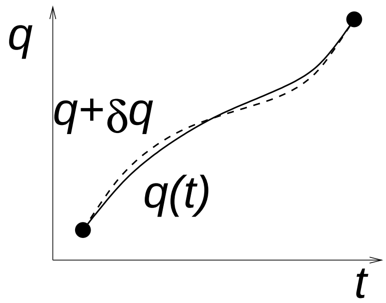
Das Funktional kann auch von $\dot{q}$ und t abhängig sein:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \ L(q, \dot{q}, t)$$

Beispiel 2.7 *Wegstrecke*
Die Wegstrecke entlang der Kurve $y = y(x)$ zwischen den Punkten x_1 und x_2 wird durch

$$l = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

gegeben.



Unsere Ziel ist das Minimum von S zu finden. Es sei nun $q(t)$ die gesuchte Funktion, die das Funktional S minimal macht. Dann muß $S[q + \delta q]$ mit einer beliebigen Abweichung δq größer als $S[q]$ sein. Dann ändert sich in erster Nährung das Funktional nicht, und diese Bedingung wollen wir jetzt explizit schreiben. Sei δq eine Störung, die Randbedingungen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ erfüllt. Betrachten wir die Variation von S:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)]$$

Die Funktion L läßt sich ableiten:

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) \approx L(q, \dot{q}, t) + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Das ergibt

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Schreiben wir den zweiten Teil des Integrals um:

$$\delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \delta q \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

So erhalten wir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \delta q\Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) + \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Der letzte Term verschwindet wegen Randbedingungen. Wir sehen jetzt, daß die Variation von S in erster Näherung Null für jede Störung wird, wenn die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

gilt. Diese heißt Euler-Lagrange-Gleichung. Falls S von mehreren Funktionen q_1, q_2, ... , q_n abhängig ist, erhält man für jede Variable die Euler-Lagrange-Gleichung.

Zu bemerken ist, daß die Euler-Lagrange-Gleichung nicht unbedingt das Minimum von S beschreibt, sondern auch das Maximum, oder, im Allgemeinen, stationäre Funktionen.

Beispiel 2.8 *Gerade Linie als Minimum der Wegstrecke*
Schreiben wir die Euler-Lagrange-Gleichung für die Wegstrecke in kartesischen Koordinaten:

$$S = \int dx\ \sqrt{1 + (y')^2}, \quad L = \sqrt{1 + (y')^2} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet also

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0$$

Sie lässt sich lösen:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = const \quad \Rightarrow \quad y' = a, \quad y = ax + b$$

Wir haben eine gerade Linie erhalten. In Polarkoordinaten schreibt man die Wegstrecke als

$$l = \int ds = \int \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\phi)^2} = \int d\phi\ \sqrt{(r')^2 + r^2}$$

Wir erhalten also

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r'} = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{d\phi}\frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}}$$

man kann die auch als

$$\frac{r''\sqrt{r^2+(r')^2} - r'\frac{rr'+r'r''}{\sqrt{r^2+(r')^2}}}{r^2+(r')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}}$$

umschreiben. Endlich erhalten wir

$$r''r - 2(r')^2 - r^2 = 0$$

Der Ansatz $r = 1/\xi$ läßt die folgende einfache Gleichung entstehen

$$\xi'' + \xi = 0$$

deren Lösung

$$\xi = A\cos(\phi - \phi_0)$$

ist. Letztendlich erhalten wir die Gliechung für eine gerade Linie in Polarkoordinaten

$$Ar\cos(\phi - \phi_0) = 1$$

2.3 Hamiltonsches Prinzip

Wir vergleichen jetzt die Euler-Lagrange-Gleichung mit der Newtonschen Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Wenn wir wählen

$$q_i = x_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{x}_i = p_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

dann stimmt die Euler-Lagrange-Gleichung mit der Newtonschen Gleichung überein. Wenn wir die Funktion L in der Form

$$L = \sum \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 - U(x_1, ..., x_n, t) = T - U$$

wählen, also als Differenz kinetischer und potentieller Energien, dann wird die Newtonsche Gleichung erfüllt.

In der Mechanik heißt $L = T - U$ Lagrangefunktion, S die Wirkung oder Wirkungsfunktional, und die Euler-Gleichung heißt die Lagrangesche Gleichung 2. Art.

Dies ist Inhalt des Hamiltonschen Prinzips: Die Bewegung läuft so ab, daß die Bahnkurve die Wirkung stationär macht. Manchmal wird das auch als Prinzip der kleinsten Wirkung genannt.

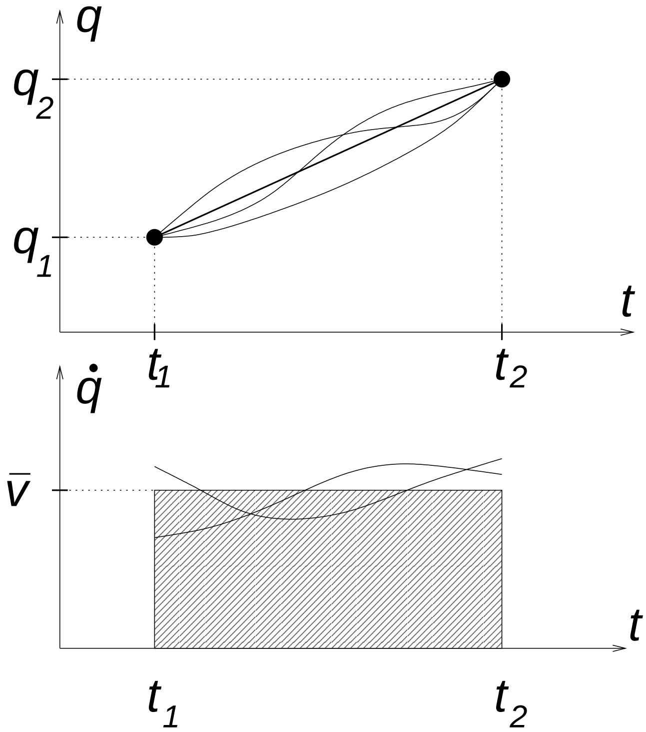
Man nennt:

q_i verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten

$\dot{q}_i$ verallgemeinerte Geschwindigkeiten

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ verallgemeinerte Impulse

$\frac{\partial L}{\partial q_i}$ verallgemeinerte Kräfte.



Beispiel 2.9 *Kraftfreie Bewegung*
Falls das Potential eine Konstante ist, muss das Integral von der kinetische Energie

$S = \int_{t_1}^{t_2} T dt$ minimal sein. Seien die Zeitpunkte $t_{1,2}$ und die Koordinaten $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$ gegeben. Die Frage ist, welche Bewegung liefert das Minimum der Wirkung S? Man kann sich verschiedene Bewegungstypen vorstellen (siehe Bild), nun muss die Bewegung mit minimalem S gefunden werden. Wir betrachten Bewegungen mit verschiedenen Geschwidigkeiten $v(t)$. Weil die Endpunkte fixiert sind, gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = q_2 - q_1$$

Wir bezeichnen $\bar{v} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$ und betrachten das Integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}(v - \bar{v})^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2 dt - \bar{v}^2 \cdot (t_2 - t_1)\frac{m}{2}$$

Dann können wir die Wirkung in der folgender Form darstellen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2 dt = I + \bar{v}^2 (t_2 - t_1)\frac{m}{2}$$

Weil $I \geq 0$ ist, wird das Minimum von S bei $I = 0$ erreicht, d. h. bei $v = \bar{v} = const$. Wir stellen fest, daß die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit die Wirkung minimisiert.

Beispiel 2.10 *Zentralkraftbewegung*
Schreiben wir die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten aus:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$$

Die verallgemeinerten Impulse $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ sind

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad \textit{(Drehimpuls!)}$$

Die Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \quad \textit{(Drehimpulserhaltung!)}$$

und

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}$$

wobei $U_{eff} = U + L_z^2/(2mr^2)$ (L_z ist Drehimpuls).

2.3.1 Eichtransformation

Es kann verschiedene Lagrangefunktionen geben, die zu den selben Bewegungsgleichungen führen. Z. B. kann man eine gegebene Lagrangefunktion mit einer Konstante multiplizieren oder addieren.

Eine wichtige Klasse von gleichwertigen Lagrangefunktionen ergibt sich aus den sogenannten Eichtransformationen: Dabei wird zu L die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(q,t)$ addiert:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

Das Wirkungsintegral für L' lautet

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L' = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L + f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)$$

Weil die Randwerte bei der Variation festgehalten werden, also $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, bekommen wir $\delta S' = \delta S$: Die Lagrangefunktionen L und L' führen zu denselben Bewegungsgleichungen.

Beispiel 2.11 *Galileitransformation*
Für ein freies Teilchen haben wir

$$L = \frac{m}{2} v^2$$

Unter einer Galileitransformation erhalten wir

$$L' = \frac{m}{2}(\vec{v} + \vec{V})^2 = \frac{m}{2} v^2 + m\vec{v}\vec{V} + \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{d}{dt}(m\vec{r}\vec{V} + \frac{m}{2} V^2 t)$$

2.4 Systeme mit Zwangsbedingungen

Falls die Massenpunkte eines mechanisches Systems sich nicht völlig unabhängig voneinander bewegen können, sondern gewissen Nebenbedingungen unterliegen, spricht man von *Zwangsbedingungen.* Betrachten wir wieder das ebene Pendel. Der Massenpunkt ist zwei Kräften unterworfen: der Gravitationskraft $m\vec{g}$ und der unbekannten Kraft $\vec{K}$.

Wir nutzen jetzt die Kovarianz von Lagrangegleichungen bezüglich der Koordinatenwahl, und schreiben die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $L(r,\dot{r},\phi,\dot{\phi},t)$. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

Wegen der Zwangsbedingung ist aber r konstant, also ist nur die Gleichung für ϕ nichttrivial. In der Lagrangefunktion können wir deshalb $r = l = const$, $\dot{r} = 0$ einsetzen und die Lagrangefunktion für das Pendel bekommen, die nur von ϕ und $\dot{\phi}$ abhängt:

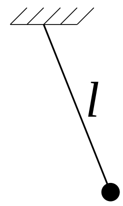
$$L(\phi, \dot{\phi}, t) = T - U = \frac{m}{2}v^2 + mgr\cos\phi = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi$$

oder

$$\ddot{\phi} + \omega^2\sin\phi = 0 \qquad \omega = \sqrt{g/l}$$



Im allgemeinen Fall
- es gibt N Teilchen, die im 3-dimensionalen Raum mit $3N$ Variablen beschrieben werden
- es gibt K Zwangsbedingungen, die als K Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1(x_1, y_1, ..., z_N, t) &= 0, \\ &... \\ g_K(x_1, y_1, ..., z_N, t) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben werden können. Solche Zwangsbedingungen, die nur von Koordinaten abhängig sind, nennt man *holonome* ("ganzgesetzliche"). Man unterscheidet auch zwischen zeitabhängigen (rheonomen) und zeitunabhängigen (skleronomen) Bedingungen.

Man kann ein allgemeines Rezept zur Lösung von mechanischen Problemen formulieren:
1) Man wählt verallgemeinerte Koordinaten, um die Zwangsbedingungen zu erfüllen. Die Zahl solcher Koordinaten ist $3N - K$.
2) Man stellt die Lagrangefunktion $L = T - U$ in diesen Koordinaten dar
3) Die Bewegungsgleichungen sind dann die Lagrangesche Gleichungen 2. Art

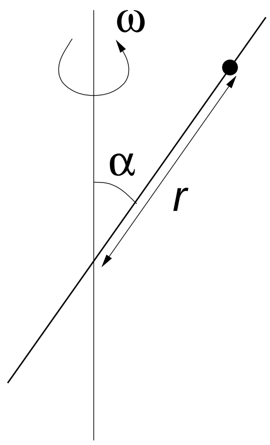
Beispiel 2.12 *Teilchen auf einem Zylinder*
Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich auf einem Zylinder frei bewegen kann. Hier haben wir $N = 1$ und $K = 1$ (die holonome skleronome Zwangsbedingung lautet $x^2 + y^2 = l^2$). Wir wählen zylindrische Koordinaten, wobei nur z und ϕ unsere

verallgemeinerte Koordinaten sind. Die kinetische Energie lautet $T = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + l^2\dot{\phi}^2)$*. Die Bewegungsgleichungen sind einfach:*

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{\phi} = 0$$

und als Lösung erhalten wir die Schraubenlinie

$$z = z_0 + v_z t \qquad \phi = \phi_0 + v_\phi t$$



Beispiel 2.13 *Massenpunkt auf rotierender Stange*
Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich längs einer rotierenden Stange bewegen kann. Die Stange rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω*. Wir haben hier zwei (eine rheonome und eine skleronome) Zwangsbedingungen* $\sqrt{x^2 + y^2}/z = \tan\alpha$ *und* $y/x = \tan\omega t$*. Wir wählen den Abstand* r *zum Zentrum als verallgemeinerte Koordinate. Dann gilt*

$$z = r\cos\alpha \qquad x = r\sin\alpha\cos\omega t \qquad y = r\sin\alpha\sin\omega t$$

Aus

$$T = \frac{m}{2}v^2 \qquad U = mgr\cos\alpha$$

erhalten wir

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha) - mgr\cos\alpha$$

(Diese Lagrangefunktion ist zeitunabhängig, obwohl die Zwangsbedingungen rheonom sind!) Dies führt zur Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = -mg\cos\alpha + rm\omega^2 \sin^2\alpha$$

Wir erhalten eine eindimensionale Bewegung mit dem effektiven quadratischen Potential

$$U(r) = mgr\cos\alpha - \frac{m}{2}r^2\omega^2\sin^2\alpha$$

Zwei Bemerkungen:

- Es ist bequem zu nutzen daß

  $$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$$

  wobei dl die elementare Verschiebung ist. In kartesischen Koordinaten ist $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, deswegen

  $$L = m/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U$$

  In zylindrischen Koordinaten ist $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$, deswegen

  $$L = m/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + U$$

- Für *nicht-mechanische Systeme* ist es nicht einfach, die Lagrangefunktion zu schreiben. Glücklicherweise sind **alle wichtigen Kräfte gut genug und lassen sich mit der Lagrange-Formulierung beschreiben.** (Z.B., die Lorentz-Kraft.)

2.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Schreiben wir die Lagrangegleichungen aus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Es ist einfach zu sehen, daß wenn L von der verallgemeinerten Koordinate q_i unabhängig ist, dann ist der verallgemeinerte Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ eine erhaltene Größe; die Koordinate q_i heißt dann **zyklische** Koordinate.

2.5.1 Zeitunabhängigket der Lagrangefunktion

Sei die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängig, $L = L(q, \dot{q})$. Leiten wir die Lagrangefunktion nach der Zeit ab:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

Berücksichtigen wir jetzt, daß $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, und stellen den Ausdruck $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ durch Lagrangegleichungen dar, so erhalten wir

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i^s \left(\dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) = \frac{d}{dt} \sum_i^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right)$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\sum_i^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i^s p_i \dot{q}_i - L = const \, ,$$

wobei auf die linke Seite die sogenannte **Hamilton Funktion** steht. Die physikalische Bedeutung dieser Größe können wir für übliche Systeme feststellen: für $L = T - U = \sum_i^s m \dot{q_i}^2 / 2 - U(q)$ haben wir

$$\sum_i^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i^s m \dot{q_i}^2 - T + U = T + U = E$$

Das ist der Energieerhaltungssatz.

2.5.2 Noether-Theorem

Wir formulieren jetzt ein allgemeines Theorem (Noether-Theorem): Ist die Lagrangefunktion invariant unter einer kontinuierlichen Koordinatentransformation, so gibt es eine Erhaltungsgröße. Das bedeutet, daß eine Funktion von Koordinaten und Geschwindigkeiten $f(q_i, \dot{q}_i, t)$ eine Konstante ist.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine Koordinatentransformation, wobei die Zeit unverändert ist:

$$Q_i = Q_i(q, t, \epsilon)$$

Wichtig ist, daß diese Transformation stetig vom Parameter ϵ abhängt und der Parameterwert $\epsilon = 0$ der identischen Transformation $Q_i(q, t, 0) = q_i$ entspricht. Dann können wir in erster Näherung in ϵ

$$Q_i = q_i + \epsilon \psi_i(q, t)$$

schreiben, wobei die Funktion ψ die infinitesimale Transformation definiert.

Im allgemeinen ist die neue Lagrangefunktion $\mathcal{L}(Q(\epsilon), \dot{Q}(\epsilon), t)$ von ϵ abhängig. Wenn diese Abhängigkeit verschwindet, bedeutet das Invarianz oder Symmetrie der Lagrangefunktion bezüglich dieser Transformation. Schreiben wir jetzt diese Bedingung explizit:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \epsilon}$$

Aus Bewegungsgleichungen folgt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}$. Außerdem können wir $\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \epsilon}$ als $\frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}$ schreiben. Also erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}$$

Wenn wir die Ableitung nach ϵ berechnen, dann gilt $\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon} = \psi_i(q, t)$. Die Erhaltungsgröße ist dann

$$C = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i$$

(Weil für $\epsilon = 0$ gilt $\mathcal{L} = L$ und $Q_i = q_i$ und der Erhaltungssatz gilt auch für $\epsilon = 0$.) Betrachten wir die wichtigsten Beispiele.

1. Wenn L von Koordinate q_i unabhängig ist, dann ist L unter der Transformation $Q_i = q_i + \epsilon$ invariant, das entspricht $\psi_i = 1$. Wir erhalten

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

die schon bekannte Erhaltung des Impulses.

2. Die Symmetrie unter Rotation um die z-Achse. In kartesischen Koordinaten ist, z. B., diese Lagrangefunktion so invariant:

$$L = T - U(x^2 + y^2, z)$$

Die Rotation kann man als

$$X = x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, \qquad Y = x \sin \epsilon + y \cos \epsilon$$

schreiben. Die infinitesimale Transformation ist

$$X = x - y\epsilon, \qquad Y = y + x\epsilon$$

Das ergibt

$$\psi_x = -y, \qquad \psi_y = x$$

Die Erhaltungsgröße ist

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\psi_y = m\dot{x}(-y) + m\dot{y}x = L_z$$

die z-Komponente des Drehimpulses.

Wir können jetzt die wichtigsten Symmetrien mit Erhaltungssätzen verbinden:

- Homogenität der Zeit – Energiesatz
- Homogenität des Raums – Impulssatz
- Isotropie des Raums – Drehimpulssatz

Bemerkung: Dies gilt nur für kontinuierliche Symmetrien, diskrete Symmetrien (z.B. $x \to -x$) entsprechen keinen Erhaltungsgrößen, weil es hier keinen kontinuierlichen Parameter ϵ gibt.

2.6 Anwendung: Kleine Schwingungen

2.6.1 Ein Freiheitsgrad: freie Schwingungen

Wir betrachten ein System mit einem Freiheitsgrad, der durch die generalisierte Koordinate q beschrieben wird. Die Lagrangefunktion sei von der Form

$$L(q, \dot{q}) = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q).$$

(Die Kinetische Energie ist $\frac{m}{2}v^2$; wenn $x_i = f(q)$ dann ist $\dot{x} = f'\dot{q}$). Das System besitze eine stabile Gleichgewichtslage bei $q = q_0$, d. h. das Potential U hat bei $q = q_0$ ein Minimum. Die Taylorentwicklung des Potentials um $q = q_0$ lautet

$$U(q) = U(q_0) + \frac{k}{2}(q - q_0)^2$$

Wir setzen nun die Auslenkung aus der Ruhlage $x = q - q_0$ ein, dann entwickeln auch die kinetische Energie bis zur quadratischen Ordnung in x:

$$T = \frac{a(q_0)}{2}\dot{x}^2$$

damit wird die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen zu

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

wobei $m = a(q_0)$. Wir bekommen schon bekannte Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega^2 = k/m$$

Beispiel 2.14 *Ebenes Pendel*
Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + lgm\cos\phi$$

Die Bewegungsleichung ist

$$ml^2\ddot{\phi} = -lgm\sin\phi \qquad \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\ .$$

(Mathematisches Pendel). Für kleine Winkel

$$\sin\phi = \phi$$

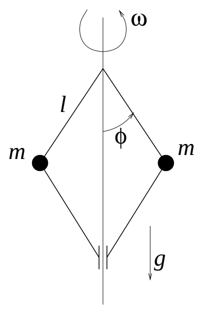
und wir erhalten

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0\ .$$

wobei

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Beispiel 2.15 *Rotierende Raute*



Wir betrachten eine rotierende Raute. Der Quadrat der infinitesimalen Verschiebung ist $(dr)^2 = (ld\phi)^2 + (l\sin(\phi)\cdot\omega dt)^2$*. Für jedes Teilchen lautet dann die Lagrange-Funktion*

$$L = \frac{m}{2}[(l\dot{\phi})^2 + (\omega l \sin\phi)^2] + mgl\cos\phi$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$ml^2\ddot{\phi} = m\omega^2 l^2 \cos\phi \sin\phi - mgl\sin\phi$$

oder

$$\ddot{\phi} = \omega^2 \cos\phi\sin\phi - \frac{g}{l}\sin\phi$$

Wir finden zuerst die Fixpunkte:

$$\omega^2\cos\phi\sin\phi = \frac{g}{l}\sin\phi$$

Es gibt zwei Lösungen

$$\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0 \qquad \cos\phi_2 = \frac{g}{l\omega^2}$$

Die zweite Lösung existiert wenn $\omega^2 > g/l$*. Wir linearisieren die Bewegungsgleichung direkt,* $\phi = \phi_2 + x$*. Am Punkt* ϕ_2 *entwickeln wir*

$$\cos(\phi_2 + x) \approx \cos\phi_2 - (\sin\phi_2)x \qquad \sin(\phi_2 + x) \approx \sin\phi_2 + (\cos\phi_2)x$$

Das ergibt (nach Benutzung $\omega^2\cos\phi_2 = g/l$*)*

$$\ddot{x} = \omega^2[2\cos^2\phi_2 - 1]x - \frac{g}{l}\cos(\phi_2)x = \omega^2[2\cos^2\phi_2 - \frac{g}{l\omega^2}\cos(\phi_2) - 1]x$$

oder

$$\ddot{x} + (\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 l^2})x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 l^2}}$$

2.6.2 Lineare Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

Wir betrachten ein System mit n Freiheitsgraden, die durch die verallgemeinerten Koordinaten $q_1, ..., q_n$ beschrieben werden. Zunächst, zeigen wir, dass die Kinetische Energie als quadratische Form der verallgemeinerten Geschwindigkeiten dargestellt werden kann:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(q_1, ..., q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j \ .$$

Nehmen wir an, wir haben N Teilchen, die durch s Koordinaten beschrieben werden:

$$\vec{r}_i = \vec{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n) \; .$$

Dann

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \sum_{j=1,k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1,k=1}^{n} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

mit $a_{j,k} = a_{k,j}$.

Sei die Lagrangefunktion des Systems von der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(q_1, ..., q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, ..., q_n)$$

Bei $q_1 = q_1^0, ..., q_n = q_n^0$ habe das System eine stabile Gleichgewichtslage. Wir entwickeln die potentielle Energie um diese Stelle

$$U(q_1, ..., q_n) = U(q_1^0, ..., q_n^0) + \sum \Big(\frac{\partial U}{\partial q_i} \Big)_0 (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big)_0 (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

Der lineare Term fällt weg, da in der Gleichgewichtslage das Potential ein Minimum hat. Außerdem lassen wir den unwesentlichen konstanten Term weg. Für kleine Auslenkungen $x = q - q_0$ erhalten wir somit

$$U \approx \frac{1}{2} \sum V_{ij} x_i x_j, \qquad V_{ij} = V_{ji} = (\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j})_0$$

In der kinetischen Energie ist bereits der niedrigste Term quadratisch in der Auslenkung

$$T \approx \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q_1^0, ..., q_n^0) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \qquad T_{ij} = T_{ji}$$

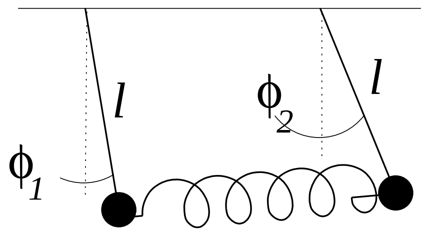
Also erhalten wir die Lagrangefunktion in der Form

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum (T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j)$$

Für $n = 2$ schreiben wir (als Beispiel)

$$L = 1/2(T_{11} \dot{x}_1^2 + T_{1,2} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + T_{2,1} \dot{x}_2 \dot{x}_1 + T_{22} \dot{x}_2^2)$$

$$-1/2(V_{11}x_1^2 + V_{12}x_1x_2 + V_{21}x_2x_1 + V_{22}x_2^2)$$



Beispiel 2.16 *Zwei gekoppelte Pendel (1)*
Nehmen wir die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 als verallgemeinerte Koordinaten. Dann

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi_1}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi_2}^2$$

und

$$U = -mgl\cos\phi_1 - mgl\cos\phi_2 + \frac{k}{2}(-l\sin\phi_1 + l\sin\phi_2)^2$$

Die Gleichgewichtslage ist $\phi_1 = \phi_2 = 0$ und die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen lautet

$$L = \frac{1}{2}\sum(T_{ij}\dot{\phi_i}\dot{\phi_j} - V_{ij}\phi_i\phi_j)$$

wobei

$$T_{11} = ml^2, \quad T_{22} = ml^2, \quad T_{12} = T_{21} = 0$$

$$V_{11} = mgl + kl^2 \quad V_{22} = mgl + kl^2 \quad V_{12} = V_{21} = -kl^2$$

(Für kleine Winkel

$$U = -mgl(1 - \phi_1^2/2) - mgl(1 - \phi_2^2/2) + k/2(-l\phi_1 + l\phi_2)^2$$

$$U = -2mgl + mgl\phi_1^2/2 + mgl\phi_2^2/2 + \frac{kl^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2)$$

$$U = \frac{1}{2}\left[(mgl + kl^2)\phi_1^2 + (mgl + kl^2)\phi_2^2 - kl^2\phi_1\phi_2 - kl^2\phi_2\phi_1\right]$$

)

Schreiben wir jetzt die Bewegungsgleichungen (Lagrangesche Gleichungen 2. Art) aus. Für $n = 2$ bekommen wir

$$T_{11}\ddot{x}_1 + T_{12}\ddot{x}_2 + V_{11}x_1 + V_{12}x_2 = 0$$

$$T_{21}\ddot{x}_1 + T_{22}\ddot{x}_2 + V_{21}x_1 + V_{22}x_2 = 0$$

und im allgemeinen

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\ddot{x}_j + V_{ij}x_j = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Das ist ein System von n linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir suchen eine Lösung in der Form

$$x_j(t) = a_j \cos(\omega t + \alpha), \qquad \ddot{x}_j = -a_j\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

und setzen sie in die Gleichungen ein:

$$\sum_{j=1}^{n}(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij})a_j \cos(\omega t + \alpha) = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Für $n = 2$ schreiben wir es explizit aus:

$$[(-\omega^2 T_{11} + V_{11})a_1 + (-\omega^2 T_{12} + V_{12})a_2] \cos(\omega t + \alpha) = 0$$
$$[(-\omega^2 T_{21} + V_{21})a_1 + (-\omega^2 T_{22} + V_{22})a_2] \cos(\omega t + \alpha) = 0$$

Diese Gleichungen sollen für alle t erfüllt sein, deshalb

$$\sum_{j=1}^{n}(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij})a_j = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Größen $a_1, ..., a_n$. Es gibt zwei Möglichkeiten:
1) Die Determinante $|-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}|$ verschwindet nicht, dann ist die triviale Lösung $a_j = 0$ die einzige Lösung.
2) Die Determinante $|-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}|$ verschwindet, dann ist eine nichttriviale Lösung möglich.

Wir haben also die Gleichung

$$|-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}| = 0$$

die die mögliche Frequenzen definiert. Diese sogenannte "charakteristische" oder "säkulare" Gleichung ist eine Gleichung von Grade n in ω^2. Diese Gleichung erlaubt uns, n Frequenzen zu finden. Für $n = 2$ lautet die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 T_{11} + V_{11} & -\omega^2 T_{12} + V_{12} \\ -\omega^2 T_{21} + V_{21} & -\omega^2 T_{22} + V_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\omega^2 T_{11} + V_{11}) \cdot (-\omega^2 T_{22} + V_{22}) - (-\omega^2 T_{21} + V_{21}) \cdot (-\omega^2 T_{21} + V_{21}) = 0$$

Beispiel 2.17 *Zwei gekoppelte Pendel (2)*
Wir schreiben die Determinante als

$$\begin{vmatrix} mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

Die algebraische Gleichung 2. Grades für ω^2 *lautet*

$$\omega^4 m^2 l^4 - \omega^2 (2ml^2(mgl + kl^2)) + (mgl + kl^2)^2 - k^2 l^4 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung heißen Eigenfrequenzen. Betrachten wir eine Eigenfrequenz ω_k. Wenn wir diesen Wert in die Gleichungen für Amplituden einsetzen, erhalten wir das System

$$\sum_{j=1}^{n} (-\omega_k^2 T_{ij} + V_{ij}) a_j = 0$$

Dieses System läßt uns die Amplituden bestimmen, sei diese Lösung $a_j^{(k)}$. Die Eigenvektoren $a_j^{(k)}$ sind nicht eindeutig festgelegt, man kann sie mit einer Konstante multiplizieren.

Die allgemeine Lösung des Systems von differentialen Gleichungen ist dann

$$x_1 = a_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$x_2 = a_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Wir wählen jetzt $\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ und $\cos(\omega_2 t + \phi_2)$ als **Normalkoordinaten** Q_1 and Q_2. Im allgemeinen

$$x_i = \sum_k a_i^{(k)} Q_k$$

Aus dem System

$$x_1 = a_1^{(1)} Q_1 + a_1^{(2)} Q_2$$

$$x_2 = a_2^{(1)} Q_1 + a_2^{(2)} Q_2$$

können die Normalkoordinaten bestimmt werden.

Also, die Bewegung ist eine überlagung von harmonischen Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen. Für jede Normalkoordinate bekommen wir die entkoppelte Gleichung

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0.$$

Beispiel 2.18 *Zwei gekoppelte Pendel (3)*
1) Finden wir die Eigenvektoren:
Erste Eigenfrequenz $\omega_1^2 = g/l$:

$$(mgl + kl^2 - (g/l)ml^2)a_1^{(1)} - kl^2 a_2^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(1)} = a_2^{(1)}$$

Zweite Eigenfrequenz $\omega_2^2 = g/l + 2k/m$:

$$(mgl + kl^2 - (g/l)ml^2 - 2(k/m)ml^2)a_1^{(2)} - kl^2 a_2^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(2)} = -a_2^{(2)}$$

2) Fügen wir die Normalkoordinaten ein

$$\phi_1 = a_1^{(1)} Q_1 + a_1^{(2)} Q_2$$

$$\phi_2 = a_2^{(1)} Q_1 + a_2^{(2)} Q_2$$

3) Analysieren wir die Eigenmoden:
Mode 1: $Q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \phi_2$
Mode 2: $Q_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = -\phi_2$